Strömungslehre

Prof. Dr.-Ing. Victor Gheorghiu
HAW Hamburg, Fakultät Technik und Informatik (TI)
Department Maschinenbau und Produktion (MP)
http://www.victor-gheorghiu.de

Dieses Skript befindet sich noch im Umbau! Fehler jeglicher Art melden Sie bitte unter **victor.gheorghiu@haw-hamburg.de**.

INHALT (3. Semester MP)

Literatur

1. Zierep, J., **Grundzüge der Strömungslehre**, Springer Verlag
2. Oertel-Böhle, **Übungsbuch Strömungsmechanik**, Springer Verlag
3. Siekmann, H.E., **Strömungslehre**, Springer Verlag
4. Wagner, W., **Strömung und Druckverlust**, Vogel Verlag
5. jedes andere Buch für Strömungslehre

1. Hydrostatik

1.1. Druck und Hydrostatik

Unter dem **Druck** (auch **Absolutdruck** benannt) versteht man den Quotient aus Normalkraft F_n und gedrückter Fläche A. Obwohl der Druck eine skalare Größe ist, wird er oft aus didaktischen Gründen durch eine größere Anzahl kleinerer Pfeile dargestellt.

$$p = \frac{F_n}{A}$$

Der Druck in einem ruhenden System (ohne innere Strömungsgeschwindigkeiten) ist richtungsunabhängig, d.h. nach allen Richtungen gleich groß. Um das zu verstehen, soll man das Fluid als Summe aller Teilchen verstehen, die miteinander und gegen die Wände stoßen. Der Druck auf die Wände ist die Folge dieser Stöße. Da die Teilchenbewegung chaotisch erfolgt, ist der Druck richtungsunabhängig.

Die SI-Einheit für den Druck heißt Pascal (Pa). Anderen Einheiten und deren Beziehungen zueinander sind unten vorgestellt

$$1 \cdot Pa = 1 \cdot \frac{N}{m^2} \qquad 1 \cdot bar = 10^5 \cdot Pa$$

$$1 \cdot mbar = 100 \cdot Pa \qquad 1 \cdot mm_{H2O} = 9.81 \cdot Pa$$

$$1 \cdot mm_{Hg} = 1 \cdot Torr = \frac{1}{760} \cdot atm = \frac{1.01325 \cdot 10^5}{760} \cdot Pa = 1.333224 \cdot mbar$$

Hydrostatik

Die Hydrostatik (Teilgebiet der Hydromechanik) ist die Lehre vom Gleichgewicht der Kräfte in ruhenden, inkompressiblen Flüssigkeiten. Alle weiter unten vorgestellten Begriffe, Gesetze und Anwendungen gehören zur Hydrostatik.

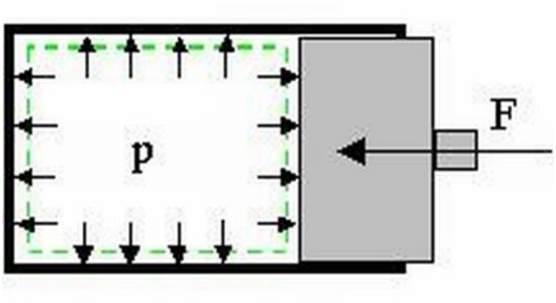
1.1.1. Unter- und Überdruck

Als **Überdruck** $p_ü$ wird die Differenz zwischen dem Druck im System und dem Umgebungsdruck p_0 oder p_U bezeichnet.

Unter dem **Unterdruck** p_u versteht man die Differenz zwischen dem Umgebungsdruck und dem Druck im System.

1.1.2. Kolbendruck und Schweredruck

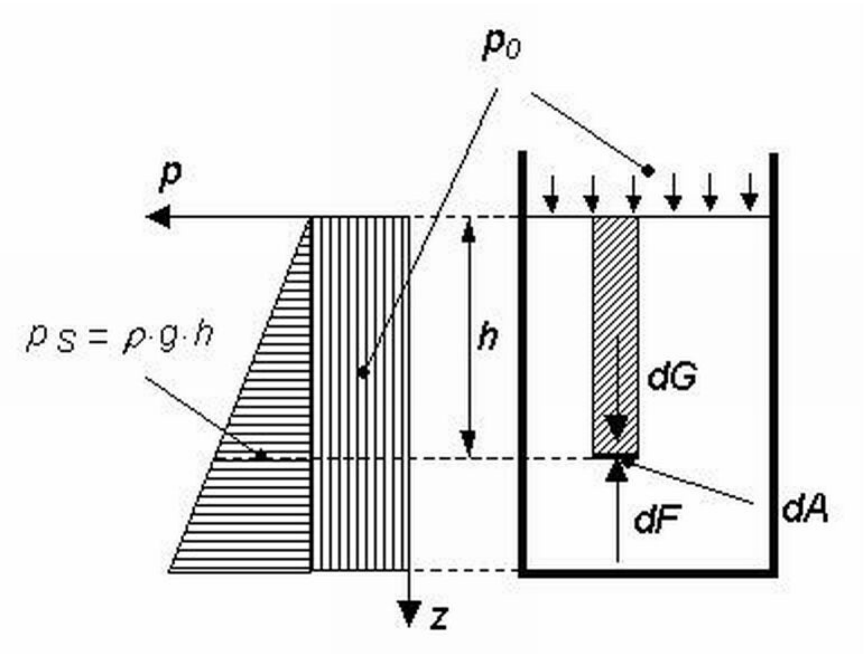
Übt man auf den Kolben eine Kraft F aus, so wird das eingeschlossene Fluid in einem homogenen Presszustand versetzt. Der so entstehende Druck heißt auch **Kolbendruck**.



Druckfortpflanzungsgesetz von Pascal: Der Druck pflanzt sich gleichmäßig durch das eingeschlossene Fluid fort.

Vernachlässigt man den durch Schwerkraft hervorgerufenen Schweredruck, so ist der **Kolbendruck** p im Innern des Fluids und an den Begrenzungswänden überall gleich groß.

Man beachtet nun auch den Anteil der Schwerkraft. Der Umgebungsdruck p_0 pflanzt sich durch das Fluid gleichmäßig fort. Der **Schweredruck** überlagert sich dem Umgebungsdruck. Die Größe des Schweredruckes p_S hängt nur von der Tiefe h ab.



Um das zu beweisen, wird das Kräftegleichgewicht für das Fluidelement mit der Grundfläche dA und Höhe h geschrieben:

$$dG = dF$$

$$\rho \cdot g \cdot dV = p_S \cdot dA \qquad p_S = \rho \cdot g \cdot \frac{dV}{dA} = \rho \cdot g \cdot \frac{h \cdot dA}{dA} = \rho \cdot g \cdot h$$

1.1.3. Hydrostatischer Druck

In Punkten gleicher Tiefe in ruhenden Fluiden herrscht der gleiche Druck, der auch als **hydrostatischer Druck** benannt wird. Die Druckverteilung ist unabhängig von der Form oder von der Größe des Behälters, der das System umringt.

Der hydrostatische Druck ist somit der Gesamtdruck in einer Tiefe *h*. Für einen offenen Behälter gilt

$$p_{gesamt} = p_0 + p_S = p_0 + \rho \cdot g \cdot h$$

und für einen geschlossenen Behälter

$$p_{gesamt} = p + p_S = p + \rho \cdot g \cdot h$$

Im Falle von Gasen wird üblicherweise der Anteil des Schweredruckes für den hydrostatischen Druck vernachlässigt, da die Dichte des Gases (vergleichbar mit der von Flüssigkeiten) zu gering ist. Das gleiche gilt aber auch für Flüssigkeiten, die unter sehr großen Kolbendruck stehen.

1.2. Anwendungen

1.2.1. Zwei nichtmischende Flüssigkeiten in einem Gefäß

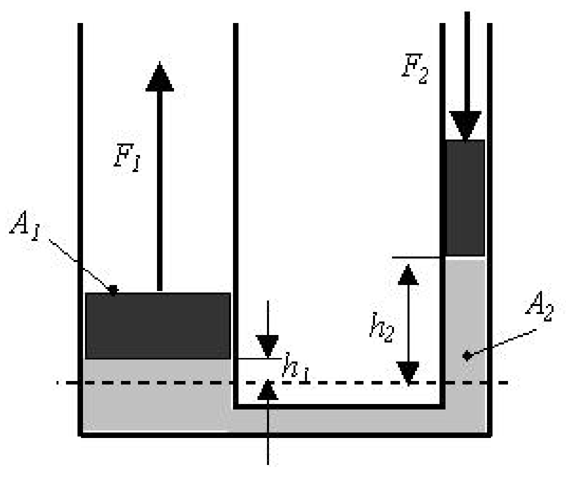
Wenn zwei nichtmischende Flüssigkeiten in ein Gefäß gegossen werden, werden sie sich nach einer gewissen Zeit trennen, so dass diejenige mit der größeren Dichte unten auf dem Gefäßboden liegen wird. Der Grund dafür ist, dass gleich große Volumina beider Flüssigkeiten unterschiedliches Gewicht aufweisen, und damit das Volumen mit dem größten Gewicht nach unten dringt bzw. fällt.

1.2.2. Hydraulische Presse

Jede hydraulische Presse hat zwei kommunizierende Arbeitszylinder. Auf dem Kolben des Zylinders 2 (mit dem kleinen Durchmesser) wird die Kraft F_2 ausgeübt. Diese Kraft wird durch das Verhältnis der Zylinderquerschnitte verstärkt, so dass die auf dem Kolben des Zylinders 1 wirkende Kraft

$$F_1 = F_2 \cdot \frac{A_1}{A_2}$$

beträgt.

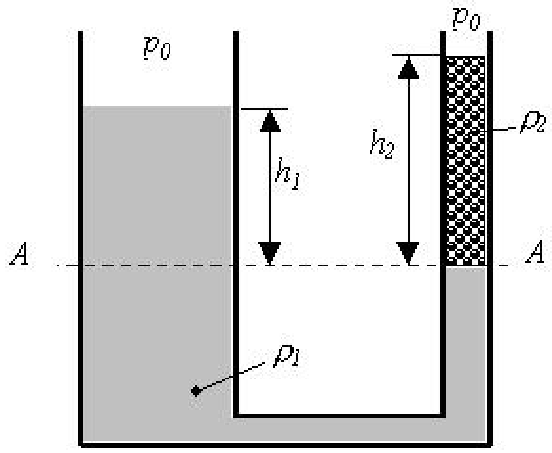


Man beachte, dass in der punktierten Ebene der Druck überall gleich groß ist (wobei der Einfluss des Schweredruckes in den Zylindern als unbedeutend klein gegenüber den wirkenden Kräften vernachlässigt wurde). Man beachte, dass die Kolbenhübe unterschiedlich sind. Die Beziehung zwischen den Hüben kann man für den Fall einer inkompressiblen Flüssigkeit herleiten, wenn das von Zylinder 2 verdrängtes Volumen gleich dem im Zylinder 1 eingedrungenen Volumen setzt.

1.2.3. Kommunizierende Gefäße, Standglas

Da der Druck in jeder waagerechten Ebene gleich groß ist, wird der Stand einer homogenen Flüssigkeit in den kommunizierenden Gefäßen gleich hoch sein.

Für den Fall von zwei nicht mischenden Flüssigkeiten (s. Bild) gilt das nicht mehr. Die Beziehung der Flüssigkeitsstände in den Schenkeln hängt von der Dichte der Flüssigkeiten ab. In der Ebene A-A gilt



$$p_0 + \rho_1 \cdot g \cdot h_1 = p_0 + \rho_2 \cdot g \cdot h_2$$

somit $$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

1.2.4. Druckkräfte auf Gefäßboden = hydrostatisches Paradoxon

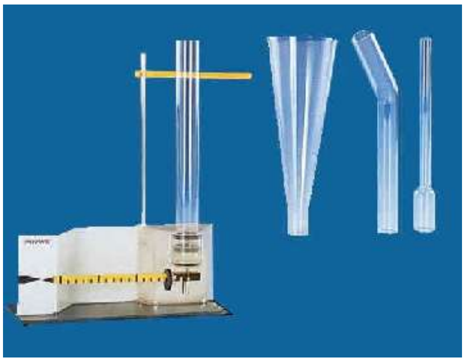
Weil der hydrostatische Druck (in einer homogenen Flüssigkeit) nur von der Tiefe abhängt, ist der Druck auf Gefäßböden unabhängig von der Gefäßgestaltung.

Mögliches Experiment[1]:

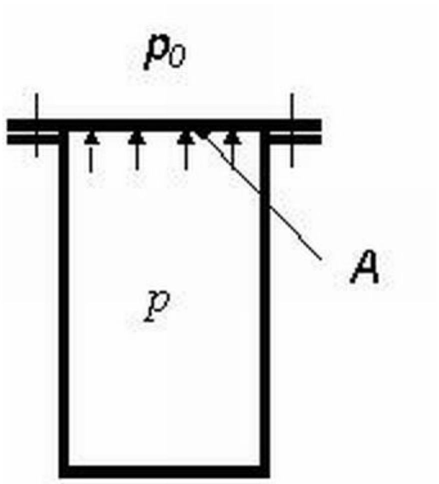
Die Glasgefäße in dem dargestellten Versuch haben alle die gleiche Grundfläche. Steckt man sie in die skizzierte Anordnung, so werden sie durch eine Gummimembran verschlossen. Füllt man Wasser in die Gefäße, so erfährt die Membran eine Kraft, die über einen Hebel (gelb mit Marken) durch ein verschiebbares Laufgewicht ausgeglichen werden kann.

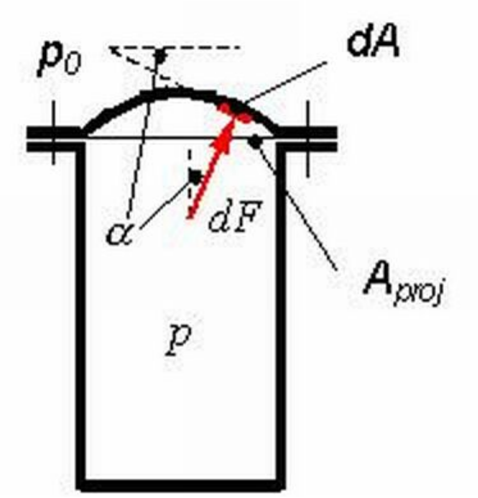
Beim Einfüllen des Wassers in das jeweilige Gefäß nimmt die Bodenkraft mit der Füllhöhe zu. Das Merkwürdige ist aber, dass unabhängig von der Gefäßform die Bodenkraft nur von der Füllhöhe abhängt. Dies wurde früher als das hydrostatische Paradoxon bezeichnet.

[1] Quelle http://www.physik.uni-muenchen.de/leifiphysik/web_ph08/versuche/14paradoxon/paradoxon.htm



1.2.5. Druckkräfte auf gewölbten Gefäßdeckel



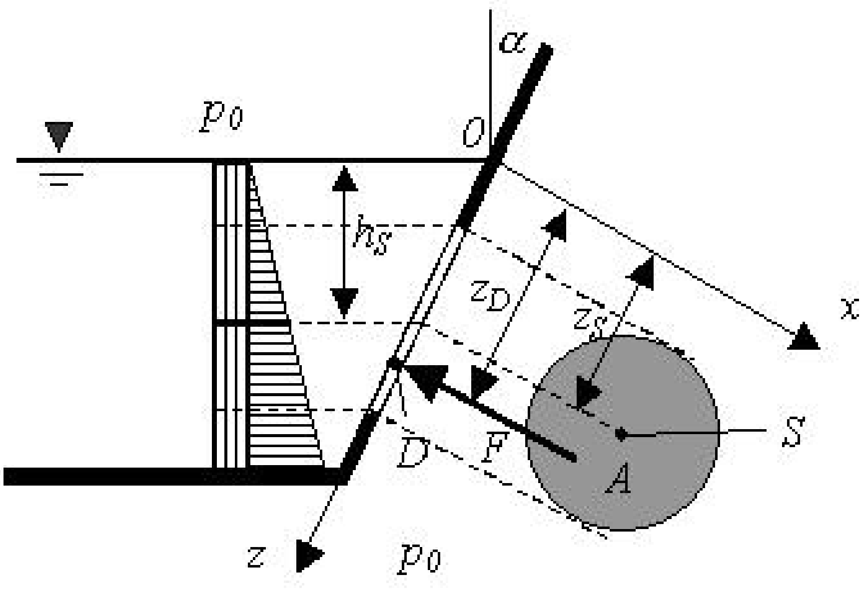


Für einen ebenen Gefäßdeckel $F = p_{ü} \cdot A$

Für einen gewölbten Gefäßdeckel

$$F = \int_A \cos(\alpha)\, dF = \int_A \cos(\alpha) \cdot p_{ü}\, dA = \int_A p_{ü}\, dA_{proj} = p_{ü} \cdot A_{proj}$$

1.2.6. Seitendruckkraft



Die auf die Fläche A des Deckels wirkende Kraft F ergibt sich aus dem Druck am Flächenschwerpunkt und dem Flächeninhalt.

$$F = \int_A p_{ü}\, dA = \rho \cdot g \cdot \int_A h\, dA = \rho \cdot g \cdot cos(\alpha) \cdot \int_A z\, dA = \rho \cdot g \cdot cos(\alpha) \cdot z_S \cdot A = \rho \cdot g \cdot h_S \cdot A = p_S \cdot A$$

Die Kraft F greift wegen der ungleichförmigen Druckverteilung nicht im Flächenschwerpunkt S sonder im Druckmittelpunkt D an. Die Koordinaten des Druckmittelpunktes ergeben sich aus dem Momentensatz. Beispielweise resultiert für die z-Achse

$$z_D \cdot F = \int_A z\, dF \qquad \text{d.h.} \qquad z_D \cdot \rho \cdot g \cdot cos(\alpha) \cdot z_S \cdot A = \rho \cdot g \cdot cos(\alpha) \cdot \int_A z \cdot z\, dA$$

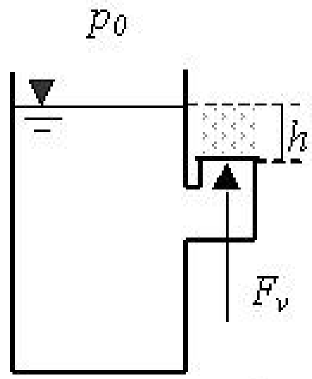
$$z_D = \frac{\int_A z^2\, dA}{z_S \cdot A} = \frac{I_x}{z_S \cdot A}$$

wobei I_x das Flächenträgheitsmoment von A bezogen auf die x-Achse (= Spiegelschnittlinie) darstellt. Mit Hilfe des Steinerschen Satzes ergibt sich

$$z_D = \frac{I_x}{z_S \cdot A} = \frac{I_{xS} + A \cdot z_S^2}{z_S \cdot A} = z_S + \frac{I_{xS}}{z_S \cdot A}$$

wobei I_{xS} das Flächenträgheitsmoment bezogen auf eine Parallele zur x-Achse durch Flächenschwerpunkt ist.

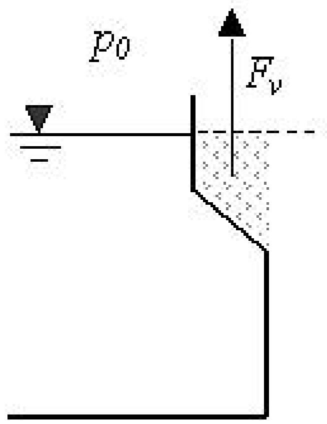
1.2.7. Aufwärtsgerichtete Vertikaldruckkraft



1) Fall eines seitlichen Deckels unter der Oberfläche.

$$F_V = p_V \cdot A_D = \rho \cdot g \cdot h \cdot A_D$$

F_V ist offensichtlich identisch mit dem Gewicht einer oberhalb des Deckels (D) gedachten Flüssigkeitssäule von der Höhe h und der Grundfläche A_D.

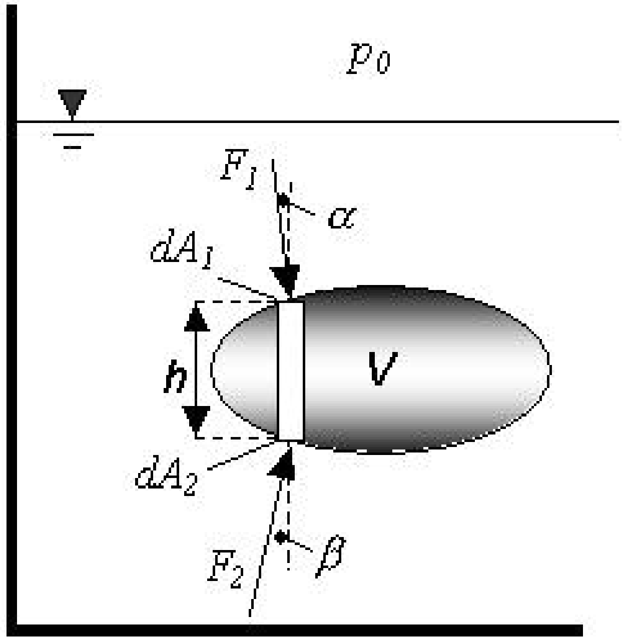


2) Fall eines Uferrandes.

$$F_V = \rho \cdot g \cdot \int_A h \, dA = \rho \cdot g \cdot V$$

V ist das oberhalb der gedrückten Fläche gedachte Flüssigkeitsvolumen bis zur Spiegelhöhe. Die Wirkungslinie geht durch den Schwerpunkt S des gedachten Volumens V.

1.2.8. Statischer Auftrieb



Man betrachte einen vollständig in einer Flüssigkeit eingetauchten Körper.

Aufgrund der hydrostatischen Druckverteilung ist der Druck an der Körper-Unterseite größer als an der Oberseite. Daraus resultiert eine vertikal (nach z-Achse) gerichtete Kraft = der statische Antrieb.

$$dF_z = p_2 \cdot dA_2 \cdot \cos(\beta) - p_1 \cdot dA1 \cdot \cos(\alpha)$$

$$dF_z = (p_2 - p_1) \cdot dA = \rho \cdot g \cdot h \cdot dA$$

Die Integration liefert

$$F_z = \rho \cdot g \cdot V = F_A$$

wobei ρ die Dichte der Flüssigkeit ist!!!

Archimedisches Prinzip: Der Auftrieb F_A ist gleich dem Gewicht der verdrängten Flüssigkeit.

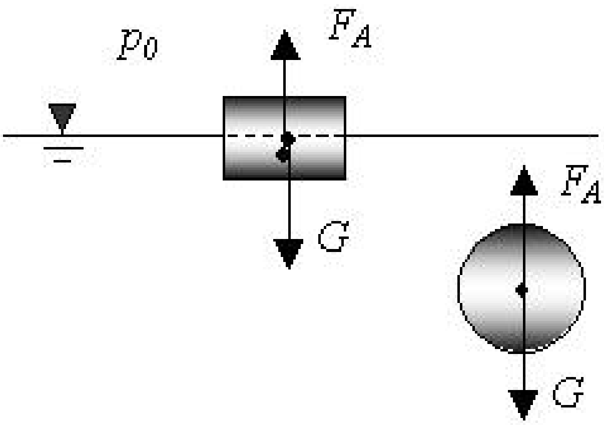
Dieser Satz gilt auch für Gase.

1.2.9. Schwimmen und Schweben

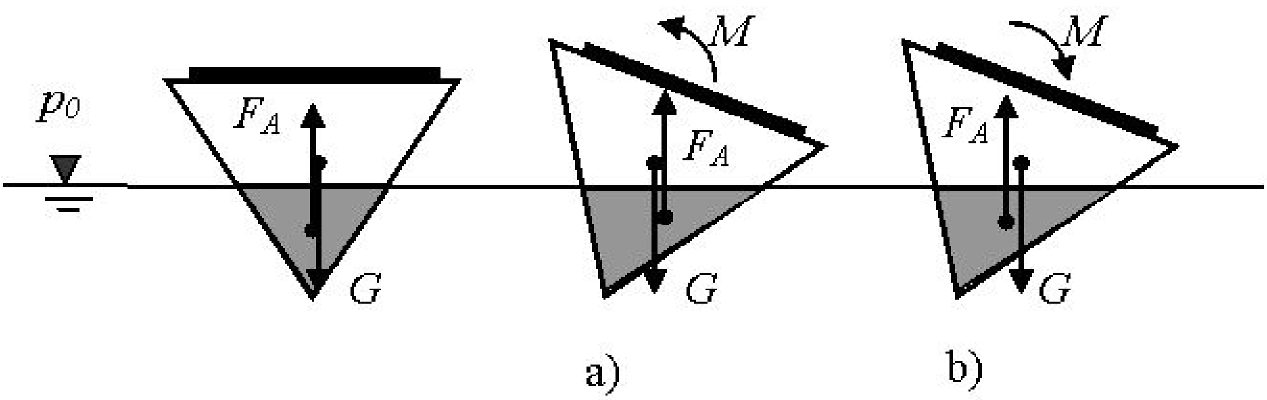
Die Gleichgewichtsbedingung für Schwimmen und Schweben ist

$$F_A = G$$

Man beachte, dass die Archimedische Kraft im Schwerpunkt der verdrängten Flüssigkeit und die Gewichtskraft im Schwerpunkt des Körpers angreifen.



1.2.10. Stabilität von schwimmenden und schwebenden Körpern



Im Falle der Störung der stabilen Lage eines schwimmenden oder schwebenden Körpers kann das Kräftepaar (von Archimedes und das Gewicht):

a) entweder gegen diese Störung mit einem Moment wirken
b) oder mit der Störung, d.h. das Störmoment noch verstärken.

Der Fall a) trifft nur ein, wenn der Schwerpunkt der verdrängten Flüssigkeit (d.h. der Angriffspunkt der Archimedischen Kraft) gegenüber dem Schwerpunkt des Körpers während seiner Neigung derart wandert, dass ein dem Störmoment entgegengerichtetes Drehmoment entsteht (s. Bild).

Beispiel 1 zu §1.3.3.3.4 = Aufgabe 2 aus TTS-Klausur vom 27.01.04 (10 Punkte)

Ein Windkessel mit dem Volumen $V_K := 10 \cdot m^3$ enthält $m_K := 20 \cdot kg$ Luft mit einer Temperatur $t_K := 27 \cdot °C$. Der Druck im Windkessel wird mit einem offenen U-Rohr-Manometer gemessen, das mit Quecksilber gefüllt ist. Der äußere Luftdruck beträgt $p_u := 1 \cdot bar$. Die Temperatur des Quecksilbers im U-Rohr entspricht der Temperatur der Umgebung $t_u := 10 \cdot °C$.
Welche Höhendifferenz Δh in m wird am Manometer abgelesen?

Hinweise:
Die Luft kann mit guter Näherung als Idealgas betrachtet werden.
Die Temperaturabhängigkeit der Dichte des Quecksilbers ist gegeben durch:

$$t_{Hg} := \begin{pmatrix} 0 \\ 100 \end{pmatrix} \cdot °C \qquad \rho_{Hg} := \begin{pmatrix} 13590 \\ 13350 \end{pmatrix} \cdot \frac{kg}{m^3}$$

Lösung

$$p_K := \frac{m_K \cdot R_L \cdot (t_K + T_0)}{V_K} \qquad p_K = 1.723\, bar$$

Die Dichte des Quecksilbers wird durch lineare Interpolation für die Temperatur t_U errechnet.

$$\rho_{Hg.t}(t) := \rho_{Hg_1} + \frac{t - t_{Hg_1}}{t_{Hg_2} - t_{Hg_1}} \cdot \left(\rho_{Hg_2} - \rho_{Hg_1}\right)$$

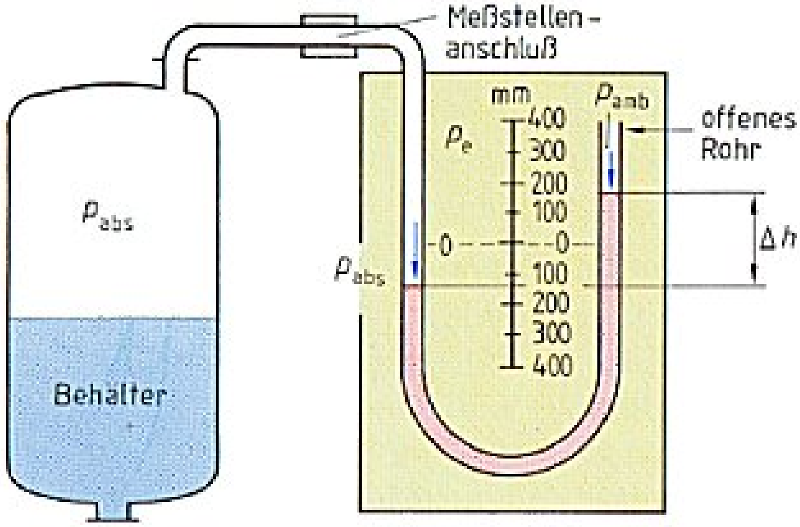
Formel der linearen Interpolation

$$\rho_{Hg.tu} := \rho_{Hg.t}(t_u) \qquad \rho_{Hg.tu} = 13566 \frac{kg}{m^3}$$

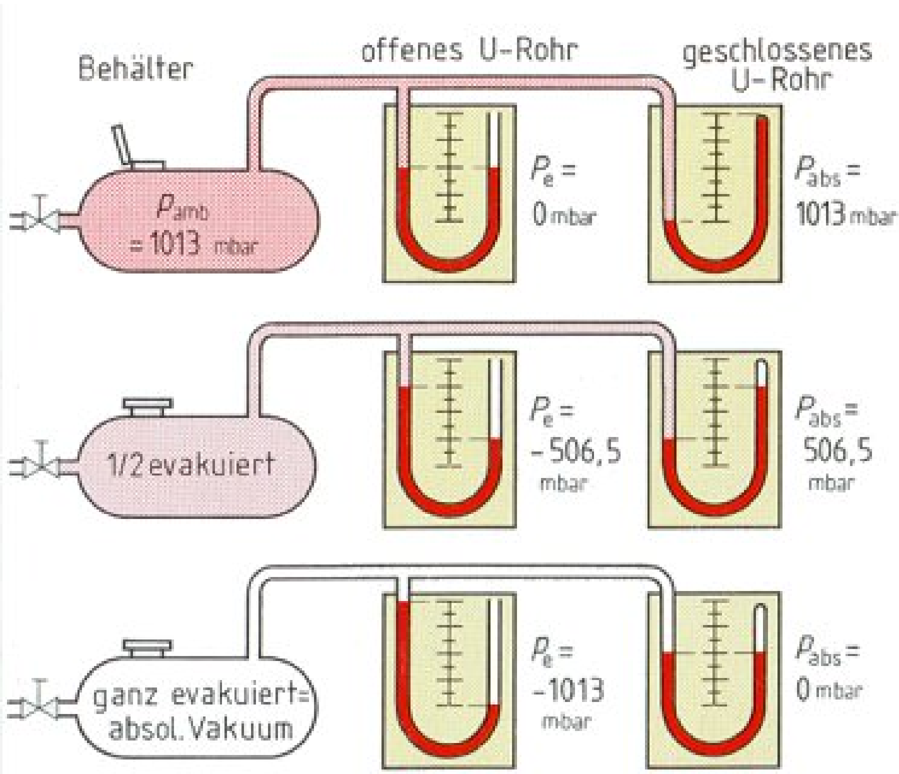
$$p_K - p_u = \rho_{Hg.tu} \cdot g \cdot \Delta h$$

$$\Delta h := \frac{p_K - p_u}{\rho_{Hg.t}(t_u) \cdot g} \qquad \Delta h = 0.544\, m$$

Hinweise:
Der Windkessel (s. linkes Bild) dient zum Dämpfen von Druckstößen in Rohrleitungen. Der Einsatz eines U-Manometers ist im rechten Bild dargestellt, wobei der Windkessel als ein großer Behälter dargestellt wurde.



Man beachte, dass ein U-Manometer in zwei Arten gebaut werden kann: a) offen und b) geschlossen zur Umgebungsseite.
Wenn der U-Manometer mit einem Behälter verbunden ist, aus dem die Luft ausgepumpt wird, können folgende Zusammenhänge zwischen den Arten a) und b) beobachtet werden, wobei der Umgebungsdruck hier *1013 mbar* beträgt:

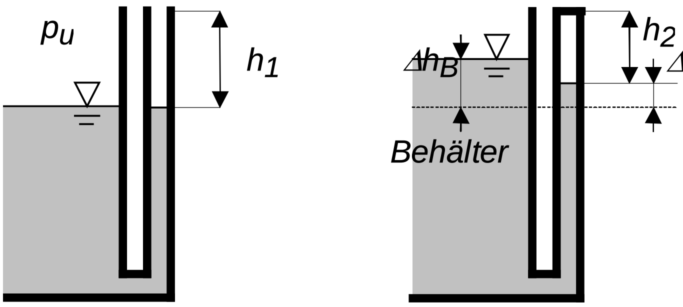


Beispiel 2 zu §1.3.3.3.4

Wie ändert sich das Niveau (Δh) in einem Standglas, wenn es oben mit einer Klappe dicht verschlossen wird und im Behälter das Niveau durch Flüssigkeitszufuhr mit $\Delta h_B := 10 \cdot cm$

angehoben wird. Vor dem Verschließen hat der Abstand zum offenen Ende des Standglases $h_1 := 20 \cdot cm$ betragen. Die Flüssigkeit hat die Dichte $\rho_F := 1000 \cdot \frac{kg}{m^3}$.

Hinweise: Der Behälter kommuniziert mit der Umgebung $p_U := 10^5 \cdot Pa$ und hat gegenüber Standglas ein sehr großes Volumen. Die Temperatur ändert sich nicht und die Luft kann als Idealgas behandelt werden.



Lösung

a) Isotherme Zustandsänderung 1-2 im Standrohr. Im Zustand 1 ist das Standrohr offen und im 2 geschlossen.

$p_1 \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2$ wobei $p_1 = p_U$

Dividiert man diese Gl. durch den Querschnitt des Standrohres A ergibt sich

$p_U \cdot h_1 = p_2 \cdot h_2$ wobei $h_2 = h_1 - \Delta h$

b) Kräftegleichgewicht im Zustand 2 (Standrohr geschlossen) an der neuen Oberfläche im Standrohr

Die Höhe der Flüssigkeit im Behälter in bezug auf diese Oberfläche beträgt
$\Delta h_B - \Delta h$

Der hydrostatische Druck im Behälter an der Tiefe $\Delta h_B - \Delta h$ beträgt damit
$p_U + \rho_F \cdot g \cdot (\Delta h_B - \Delta h)$ und gleicht dem Druck im Standglas (hier Oberfläche) p_2.

Setzt man nun diese Teilergebnisse in die Gleichung der isothermen Zustandsänderung ein

$$p_U \cdot h_1 = \left[p_U + \rho_F \cdot g \cdot (\Delta h_B - \Delta h) \right] \cdot (h_1 - \Delta h)$$

und löst man nach Δh auf, ergibt sich

$$p_U \cdot h_1 = \left[p_U + \rho_F \cdot g \cdot (\Delta h_B - \Delta h) \right] \cdot (h_1 - \Delta h)$$

$$\rho_F \cdot g \cdot \Delta h^2 + \left[p_U + \rho_F \cdot g \cdot (\Delta h_B + h_1) \right] \cdot \Delta h + \rho_F \cdot g \cdot \Delta h_B \cdot h_1 = 0$$

Diese ist eine Gleichung 2. Ordnung mit den Koeffizienten a, b, c

$a := \rho_F \cdot g$ $\qquad a = 9.807 \times 10^3 \frac{Pa}{m}$

$b := -\left[p_u + \rho_F \cdot g \cdot \left(\Delta h_B + h_1\right)\right]$ $\qquad b = -1.029 \times 10^5\, Pa$

$c := \rho_F \cdot g \cdot \Delta h_B \cdot h_1$ $\qquad c = 196.133\, Pa \cdot m$

Von den beiden Wurzeln wird nur die passende (d.h. die negative Wurzel oder die Wurzel größer als h_1 wird verworfen) genommen

$$\Delta h := \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \qquad \Delta h = 1.906\, mm$$

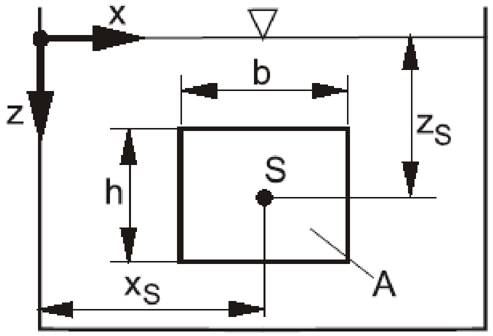
Somit beträgt der Druck im geschlossenen Standglas

$p_2 := p_u + \rho_F \cdot g \cdot \left(\Delta h_B - \Delta h\right)$ $\qquad p_2 = 1.0096 \times 10^5\, Pa$

$p_2 = 1.0096\, bar$

Beispiel 3 zu §1.3.3.3.4 (Seitendruckkraft)

Man bestimme die Größe und die Angriffspunkt-Lage der Seitendruckkraft auf dem Deckel (s. Bild).



Gegeben:

$z_S := 2 \cdot m$ $\quad b := 0.8 \cdot m$ $\quad h := 1.2 \cdot m$ $\quad \rho_W := 999 \cdot \frac{kg}{m^3}$

Für die rechteckige Fläche des Deckels gelten

$A := b \cdot h$ $\quad A = 0.96\,m^2$ $\quad I_{xS} := \frac{b \cdot h^3}{12}$ $\quad I_{xS} = 0.115\,m^4$

Der Druck in Schwerpunktlage beträgt

$p_{üS} := \rho_W \cdot g \cdot z_S$ $\quad p_{üS} = 0.196\,bar$

und somit die Seitendruckkraft

$F_S := p_{üS} \cdot A$ $\quad F_S = 18.81\,kN$

$$z_D = z_S + \frac{I_{xS}}{z_S \cdot A} = z_S + \frac{1}{z_S \cdot b \cdot h} \cdot \frac{b \cdot h^3}{12}$$

$z_D := z_S + \frac{1}{12} \cdot \frac{h^2}{z_S}$ $\quad z_D = 2.06\,m$

Beispiel mit Archimedes Kraft

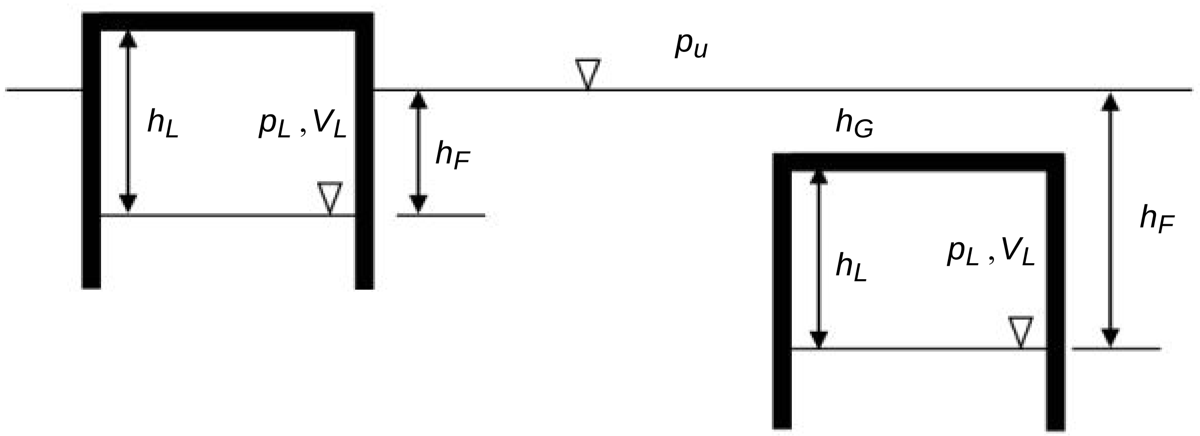
Glocke (Index G) im Schwimm- und Schwebe-Zustand im Wasser (Index F)

Gegeben:

$V_G, A_G, G_G, p_u, \rho_F$

Annahmen:
- Archimedes Kraft der Glockenwände wird hierunter vereinfachend nicht berücksichtigt (d.h. sehr dünne Wände)
- Isotherme Verdichtung der Luft (Index L)

Schwimmen **Schweben**



Schwimmen

a) Die Auftriebskraft wird von der Druckdifferenz zwischen den unteren und oberen Oberflächen A_G des verdrängten Volumens V_F, d.h. des Luftvolumens bis zur Wasseroberfläche, bestimmt.
An der Tiefe h_F ist der Druck dem hydrostaischem Druck $p_{ges.hF}$ gleich.
An der Wasseroberfläche und oberhalb ist der Druck dem Umgebungsdruck p_u gleich.
Damit wird die Auftriebskraft:

$$F_A = \left(p_{ges.hF} - p_u\right) \cdot A_G = \left(p_u + \rho_F \cdot g \cdot h_F - p_u\right) \cdot A_G = \rho_F \cdot g \cdot h_F \cdot A_G = \rho_F \cdot g \cdot V_F$$

b) Das gleiche Ergebnis erhält man für die Auftriebskraft, wenn man die Druckkraft betrachtet, die wegen der Druckdifferenz zwischen dem (Luft-)Druck unter der Glocke p_L und der Umgebung auftritt, weil (gemäß dem Gesetz von Pascal) der gleiche Druck in der Tiefe h_F (sowohl in der Luft unter der Glocke als auch im Wasser) herrscht.

$$p_L = p_{ges.hF} = p_u + \rho_F \cdot g \cdot h_F$$

Schweben

Bei Schweben ist die Situation ähnlich wie beim Schwimmen, aber über der Glocke herrscht diesmal nicht der Umgebungsdruck sonder der hydrostatische Druck in der Tiefe
$h_G = h_F - h_L$ (wobei die Wandstärke der Glocke hier nicht berücksichtigt wird).
Frage: **Ist die Auftriebskraft in diesem Fall von der Tiefe abhängig?**

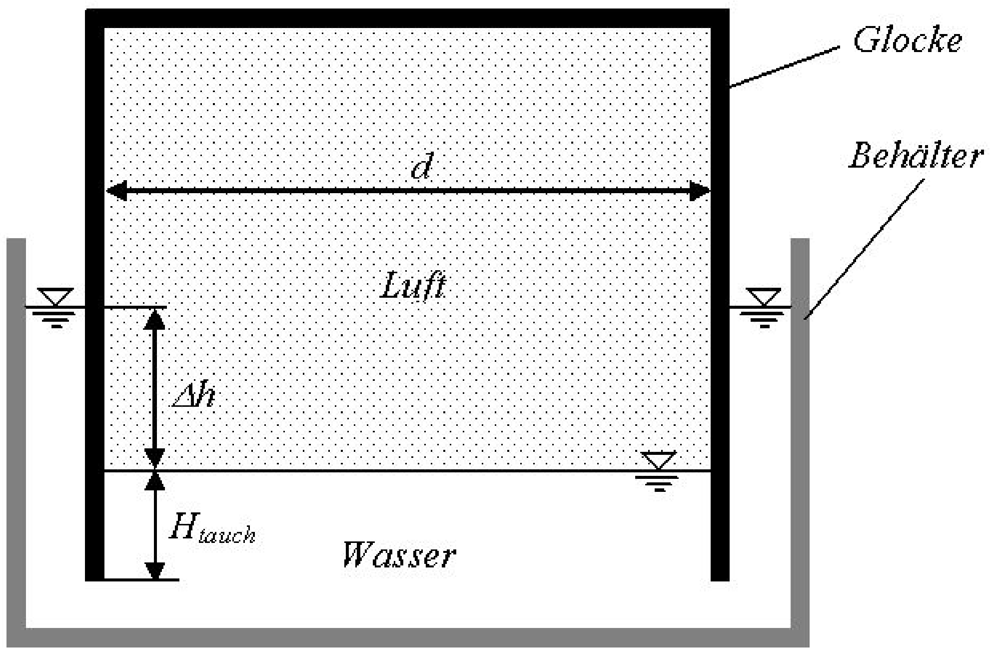
Beispiel 4 zu §1.3.3.3.4 = Aufgabe 3 aus Klausur vom 27.01.04 (55 Punkte)

Eine Gasometerglocke fasst $V_L := 30000 \cdot m^3$ Luft (Idealgas) bei einer Temperatur von $t_L := 20 \cdot °C$. Die Masse der zylindrischen Glocke mit der Wandstärke $\Delta s := 10 \cdot mm$, aus Eisen mit der Dichte $\rho_G := 7.2 \cdot \frac{kg}{dm^3}$, ist so bemessen, dass in der Glocke ein Überdruck von $p_{Lü} := 3 \cdot kPa$ herrscht. Der Umgebungsdruck beträgt $p_U := 100.8 \cdot kPa$. Der Glockendurchmesser beträgt $d := 40 \cdot m$.

Die Dichte des Wassers beträgt $\rho_W := 1 \cdot \frac{kg}{Liter}$.

1. Wie groß sind die eingeschlossene Luftmasse m_L, die Masse m_G der Glocke, der Spiegelunterschied Δh und die eingetauchte Höhe H_{tauch}, **wenn der Auftrieb vernachlässigt wird** ?
2. Welche Masse m_{G2} muss die Glocke haben, **wenn der Auftrieb berücksichtigt wird**, um der gleiche Luftdruck unter der Glocke zu herrschen? Wie groß ist die eingetauchte Höhe H_{tauch2} in diesem Fall?
3. Welcher Druck $p_{Lü3}$ stellt sich unter der Glocke der Masse m_G (also die Masse, die unter Punkt 1. ermittelt wurde), **wenn der Auftrieb berücksichtigt wird**? Wie groß ist die eingetauchte Höhe H_{tauch3} in diesem Fall?

Lösung



1. Ohne Berücksichtigung der Archimedes Kraft

Der Absolutdruck der Umgebung

$p_L := p_{Lü} + p_u$ $\qquad p_L = 1.038\,bar$ $\qquad p_u = 1.008\,bar$

Die Luftmasse unter der Glocke wird mithilfe der thermischen Zustandsgleichung idealer Gase ermittelt

$$m_L := \frac{p_L \cdot V_L}{R_L \cdot (t_L + T_0)} \qquad m_L = 3.7 \times 10^4\,kg$$

$$A_G := \frac{\pi \cdot d^2}{4} \qquad A_G = 1256.6\,m^2$$

Glockeinnenquerschnitt

Wenn die Archimedes Kraft der Glockenwänden nicht berücksichtigt wird, wirken auf die Glocke nur Gewichts- und Gaskraft infolge des Luftüberdruckes.

$$G = F_{pLü} \qquad m_G \cdot g = p_{Lü} \cdot A$$

somit für die Glockenmasse resultiert

$$m_G := \frac{p_{Lü}}{g} \cdot A_G \qquad m_G = 3.844 \times 10^5\,kg$$

Die Steighöhe Δh entsteht wegen der Druckdifferenz zwischen Umgebung und Glocke, somit gilt

$$\Delta h := \frac{p_{Lü}}{\rho_W \cdot g} \qquad \Delta h = 0.306\,m$$

Die Höhe der Luftsäule (Luftvolumen) unter der Glocke beträgt

$$H_L := \frac{V_L}{A_G} \qquad H_L = 23.873\,m$$

Höhe des Luftvolumens

Für das Volumen der Eisenwände der Glocke (Zylinder plus Deckel) gilt es

$$V_G = A_G \cdot \Delta s + S_G \cdot H_G \qquad (1) \qquad \text{wobei} \qquad V_G = \frac{m_G}{\rho_G}$$

wobei H_G die Gesamtglockenhöhe und S_G die Querschnittsfläche der zylindrischen Wand sind.

$$S_G := \pi \cdot (d + \Delta s) \cdot \Delta s \qquad S_G = 1.257\,m^2$$

Aus der Gl (1) es resultiert für die Gesamtglockenhöhe

$$H_G := \frac{\frac{m_G}{\rho_G} - A_G \cdot \Delta s}{S_G} \qquad H_G = 32.48\,m$$

Somit kann man nun die eingetauchte Tiefe ermitteln

$$H_{tauch} := H_G - H_L \qquad H_{tauch} = 8.607\,m$$

2. Mit Berücksichtigung der Archimedes Kraft (gleicher Druck unter Glocke)

Wenn die Archimedes Kraft berücksichtigt wird, resultiert es für das Gleichgewicht der Glocke

$$G = F_A + F_{pü}$$

Da nun eine weitere Kraft das Gewicht der Glocke ausgleicht, kann die Glockenmasse noch größer werden (und somit auch die Glockenhöhe).
Für das eingetauchte Volumen gilt

$$V_{tauch} = S_G \cdot H_{tauch} = S_G \cdot \left(H_G - H_L\right)$$

wobei diesmal die Lufthöhe sich nicht ändert.

$$H_L = \frac{V_L}{A_G} = \frac{m_L \cdot R_L \cdot \left(t_L + T_0\right)}{A_G \cdot \left(p_{Lü} + p_u\right)}$$

Eingesetzt in Gleichgewichtsgleichung ergibt sich nach

$$F_A = S_G \cdot H_{tauch} \cdot \rho_W \cdot g$$

$$m_G \cdot g = S_G \cdot H_{tauch} \cdot \rho_W \cdot g + A_G \cdot p_{Lü}$$

$$m_G \cdot g = S_G \cdot \left(H_G - H_L\right) \cdot \rho_W \cdot g + A_G \cdot p_{Lü}$$

$$m_G \cdot g = S_G \cdot \left[\frac{\frac{m_G}{\rho_G} - A_G \cdot \Delta s}{S_G} - \frac{m_L \cdot R_L \cdot \left(t_L + T_0\right)}{A_G \cdot \left(p_{Lü} + p_u\right)}\right] \cdot \rho_W \cdot g + A_G \cdot p_{Lü}$$

$$m_G \cdot g = \left[\left(\frac{m_G}{\rho_G} - A_G \cdot \Delta s\right) - \frac{m_L \cdot R_L \cdot \left(t_L + T_0\right) \cdot S_G}{A_G \cdot \left(p_{Lü} + p_u\right)}\right] \cdot \rho_W \cdot g + A_G \cdot p_{Lü}$$

$$m_G \cdot g = \left(\frac{m_G}{\rho_G} - A_G \cdot \Delta s\right) \cdot \rho_W \cdot g - \frac{m_L \cdot R_L \cdot \left(t_L + T_0\right) \cdot S_G}{A_G \cdot \left(p_{Lü} + p_u\right)} \cdot \rho_W \cdot g + A_G \cdot p_{Lü}$$

$$m_G \cdot g \cdot \left(1 - \frac{\rho_W}{\rho_G}\right) = -A_G \cdot \Delta s \cdot \rho_W \cdot g - \frac{m_L \cdot R_L \cdot \left(t_L + T_0\right) \cdot S_G}{A_G \cdot \left(p_{Lü} + p_u\right)} \cdot \rho_W \cdot g + A_G \cdot p_{Lü}$$

Somit ergibt sich für die Glockenmasse in dieser 2. Variante

$$m_{G2} := \frac{-A_G \cdot \Delta s \cdot \rho_W \cdot g - \frac{m_L \cdot R_L \cdot (t_L + T_0) \cdot S_G}{A_G \cdot (p_{Lü} + p_u)} \cdot \rho_W \cdot g + A_G \cdot p_{Lü}}{g \cdot \left(1 - \frac{\rho_W}{\rho_G}\right)}$$

$m_{G2} = 3.97 \times 10^5\,kg$ im Vergleich zur 1. Variante $m_G = 3.844 \times 10^5\,kg$ $H_{tauch} = 8.607\,m$

Wie erwartet ist die Glockenmasse größer und somit auch die Tauchhöhe

$$H_{tauch2} := \frac{\frac{m_{G2}}{\rho_G} - A_G \cdot \Delta s}{S_G} - \frac{m_L \cdot R_L \cdot (t_L + T_0)}{A_G \cdot (p_{Lü} + p_u)} \qquad H_{tauch2} = 9.995\,m$$

3. Mit Berücksichtigung der Archimedes Kraft (gleiche Glockemasse)

Die oben entwickelte Gleichgewichtsgleichung

$$m_G \cdot g = S_G \cdot \left[\frac{\frac{m_G}{\rho_G} - A_G \cdot \Delta s}{S_G} - \frac{m_L \cdot R_L \cdot (t_L + T_0)}{A_G \cdot (p_{Lü} + p_u)}\right] \cdot \rho_W \cdot g + A_G \cdot p_{Lü}$$

sollte nun nach dem Luftüberdruck umgestellt werden.

$$\frac{m_G}{\rho_W} = \frac{m_G}{\rho_G} - A_G \cdot \Delta s - \frac{m_L \cdot R_L \cdot (t_L + T_0) \cdot S_G}{A_G \cdot (p_{Lü} + p_u)} + \frac{A_G}{\rho_W \cdot g} \cdot p_{Lü}$$

$$\frac{m_G}{\rho_W} - \frac{m_G}{\rho_G} + A_G \cdot \Delta s = \frac{-m_L \cdot R_L \cdot (t_L + T_0) \cdot S_G}{A_G \cdot (p_{Lü} + p_u)} + \frac{A_G}{\rho_W \cdot g} \cdot p_{Lü}$$

$$\left(\frac{m_G}{\rho_W} - \frac{m_G}{\rho_G} + A_G \cdot \Delta s\right) \cdot (p_{Lü} + p_u) = \frac{-m_L \cdot R_L \cdot (t_L + T_0) \cdot S_G}{A_G} + \frac{A_G}{\rho_W \cdot g} \cdot p_{Lü} \cdot (p_{Lü} + p_u)$$

$$\frac{-m_L \cdot R_L \cdot (t_L + T_0) \cdot S_G}{A_G} + \frac{A_G}{\rho_W \cdot g} \cdot p_{Lü} \cdot (p_{Lü} + p_u) - \left(\frac{m_G}{\rho_W} - \frac{m_G}{\rho_G} + A_G \cdot \Delta s\right) \cdot (p_{Lü} + p_u) = 0$$

$$\frac{A_G}{\rho_W \cdot g} \cdot p_{Lü}^2 + \left(\frac{A_G}{\rho_W \cdot g} \cdot p_u - \frac{m_G}{\rho_W} + \frac{m_G}{\rho_G} - A_G \cdot \Delta s\right) \cdot p_{Lü} \;\ldots\; = 0$$
$$+ (-m_L) \cdot R_L \cdot (t_L + T_0) \cdot \frac{S_G}{A_G} - \left(\frac{m_G}{\rho_W} - \frac{m_G}{\rho_G} + A_G \cdot \Delta s\right) \cdot p_u$$

Somit ergibt sich eine Gleichung 2. Ordnung für den Überdruck mit den Koeffizienten

$$a := \frac{A_G}{\rho_W \cdot g} \qquad a = 0.128\,\frac{m^4 s^2}{kg}$$

$$b := \frac{A_G}{\rho_W \cdot g}\cdot p_u - \frac{m_G}{\rho_W} + \frac{m_G}{\rho_G} - A_G \cdot \Delta s \qquad b = 1.257 \times 10^4\, m^3$$

$$c := -m_L \cdot R_L \cdot (t_L + T_0) \cdot \frac{S_G}{A_G} - \left(\frac{m_G}{\rho_W} - \frac{m_G}{\rho_G} + A_G \cdot \Delta s\right) \cdot p_u \qquad c = -3.775 \times 10^7\, J$$

Die passende Wurzel (die andere Wurzel ist negativ) und somit die Lösung ist

$$p_{Lü3} := \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2a} \qquad p_{Lü3} = 2.916 \times 10^3\, Pa$$

im Vergleich zur 1. Variante

$$p_{Lü} = 3 \times 10^3\, Pa$$

$$H_{tauch} = 8.607\, m$$

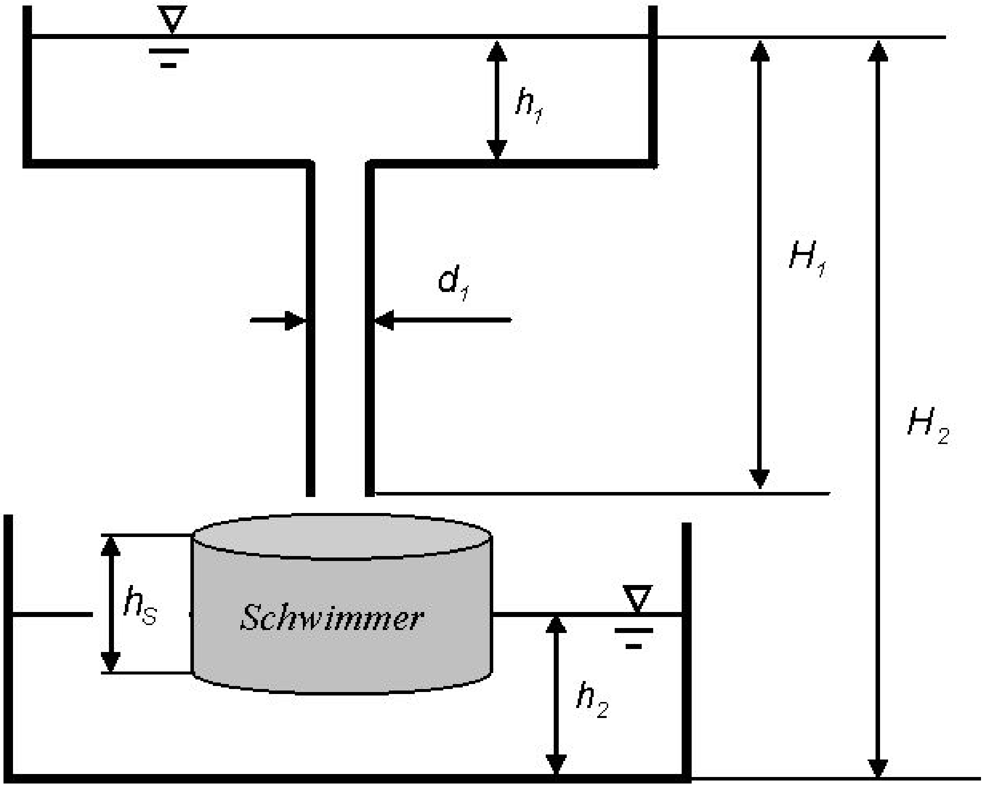
Die eingetauchte Höhe beträgt in dieser 3. Variante

$$H_{tauch3} := \frac{\frac{m_G}{\rho_G} - A_G \cdot \Delta s}{S_G} - \frac{m_L \cdot R_L \cdot (t_L + T_0)}{A_G \cdot (p_{Lü3} + p_u)} \qquad H_{tauch3} = 8.587\, m$$

Beispiel 5 zu §1.3.3.3.4 = Aufgabe 9 aus Klausur vom 12.03.05 (30 Punkte)

Wasser als inkompressibles Fluid strömt solange aus dem Behälter 1 in Behälter 2, bis der zylindrische Schwimmer mit der Höhe h_S dies unterbricht. Das Wasserniveau h_1 im Behälter 1 bleibt währenddessen unverändert. Man bestimme das Wasserniveau h_2, wenn folgende Daten bekannt sind:

$d_1 := 0.05 \cdot m$	$h_1 := 1 \cdot m$	$H_1 := 3 \cdot m$	$H_2 := 5 \cdot m$
Schwimmer:	$m_S := 10 \cdot kg$	$\rho_S := 0.5 \cdot \frac{kg}{dm^3}$	$h_S := 0.5 \cdot m$
Umgebung:	$p_0 = 1 \times 10^5\, Pa$		
Wasser:	$\rho_W := 1 \cdot \frac{kg}{dm^3}$		



Lösung

Das Kräftegleichsgewicht für den Schwimmer lautet

$F_A = G_S + F_p$ wobei

$F_A = \rho_W \cdot h_{SW} \cdot A_S \cdot g$ — Archimedes Kraft, wobei h_{SW} ist die eingetauchte Höhe des Schwimmers

$G_S = m_S \cdot g$ — Gewichtskraft

$F_p = \left(p_W - p_0\right) \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d_1^{\,2}$ — Druckkraft verursacht vom Überdruck der Wassersäule aus dem Rohr

$p_W = p_0 + \rho_W \cdot g \cdot H_1$ — Hydrostatischer Druck der Wassersäule aus dem Rohr

$A_S := \frac{m_S}{\rho_S \cdot h_S}$ $A_S = 400\,cm^2$ — Schwimmerquerschnittsfläche

Eingesetzt in Kräftegleichsgewicht

$$\rho_W \cdot h_{SW} \cdot A_S \cdot g = m_S \cdot g + \rho_W \cdot g \cdot H_1 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d_1^{\,2}$$

und aufgelöst nach der eingetauchten Höhe des Schwimmers

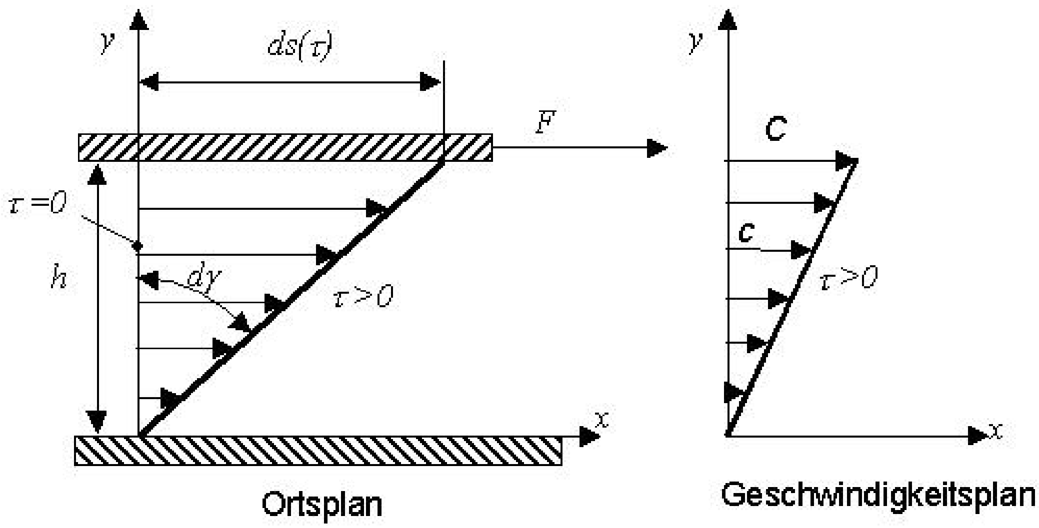
$$h_{SW} := \frac{m_S + \rho_W \cdot H_1 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d_1^{\,2}}{\rho_W \cdot A_S} \qquad h_{SW} = 0.397\,m$$

ergibt sich für das Spiegelniveau des Wassers im unteren Behälter

$$h_2 := H_2 - H_1 - \left(h_S - h_{SW}\right) \qquad h_2 = 1.897\,m$$

1.3. Viskosität (Zähigkeit) und Fließverhalten der Fluide

Um die Viskosität zu erklären, wird zunächst als Beispiel der Fall der Scherströmung (auch Couette-Strömung genannt) zwischen zwei ebenen Platten besprochen. Die obere Platte werde mit der konstanten Geschwindigkeit C bewegt, die untere ruht. Man verfolgt nun den Strömungsvorgang sowohl im Ortsplan (x,y) als auch im Geschwindigkeitsplan (c,y). Das Experiment liefert eine lineare Geschwindigkeitsverteilung (s. Bild) im Plattenspalt.



$$c = C \cdot \frac{y}{h}$$

Die Haftbedingung bei $y = 0$ und bei $y = h$ ist offenbar erfüllt. Der Zusammenhang zwischen Orts- und Geschwindigkeitsplan führt zu den Gleichungen

$$ds(\tau) = h \cdot d\gamma(\tau) \qquad C = \frac{ds(\tau)}{d\tau} \qquad \text{somit} \qquad C = h \cdot \frac{d\gamma}{d\tau}$$

Ein **Newtonsches Fluid** wird durch die lineare Beziehung zwischen der Schubspannung τ und dem Geschwindigkeitsgefälle definiert

$$\tau = \eta \cdot \frac{dc}{dy}$$

Aus der Geschwindigkeitsverteilung folgt für das Geschwindigkeitsgefälle

$$\frac{dc}{dy} = \frac{c}{y} = \frac{C}{h} = \frac{d\gamma}{d\tau}$$

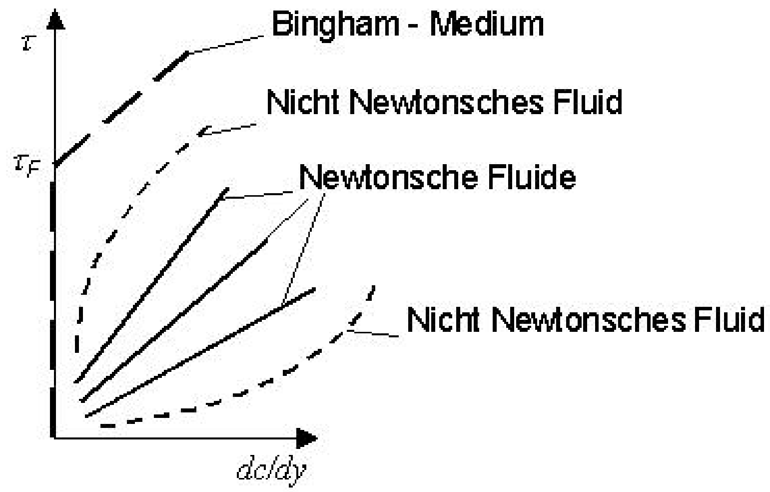
und eingesetzt in der Definitionsformel des Newtonschen Fluids ergibt sich

$$\tau = \eta \cdot \frac{dc}{dy} = \eta \cdot \frac{C}{h} = \eta \cdot \frac{d\gamma}{d\tau}$$

Bei Newtonschen Fluiden ist damit die Schubspannung τ der Deformationsgeschwindigkeit proportional. Der Proportionalitätsfaktor η heißt **dynamische Viskosität**. Zusätzlich wird nun auch die **kinematische Viskosität** ν eingeführt

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}$$

Im folgenden Bild werden Fließverhalten von mehreren Stoffen dargestellt.



Die Einheiten für die dynamische und kinematische Viskositäten sind

$$\eta = \tau \cdot \frac{dy}{dc} \qquad \frac{N}{m^2} \cdot \frac{m}{\frac{m}{s}} = Pa \cdot s \qquad \qquad \nu = \frac{\eta}{\rho} \qquad \frac{N}{m^2} \cdot s \cdot \frac{m^3}{kg} = \frac{kg \cdot m}{s^2} \cdot \frac{m \cdot s}{kg} = \frac{m^2}{s}$$

Die Viskosität ist bei Fluiden **temperaturabhängig**, so dass mit einem Temperaturanstieg die dynamische Viskosität bei Flüssigkeiten sinkt und bei Gasen steigt. Dieses Verhalten wird verständlich, wenn man die Mikrostruktur (Teilchen) dieser Fluide bedenkt. Zum Beispiel wegen durch die Temperaturerhöhung die Flüssigkeitsteilchen lockerer (die Anziehungskräfte können von der kinetischen Energie der Teilchen leichter überwunden werden) und somit beweglicher. Im Gegensatz stehen die Gase, bei denen die Teilchengeschwindigkeit größer werden und somit die Widerstandsfähigkeit im Falle einer Strömung erhöhen.

1.4. Oberflächenspannung und Kapillarität

Diese Eigenschaften erkennt man am besten bei Flüssigkeiten; bei Gasen treten diese ebenfalls auf, aber wegen des geringen Einflusses auf das Verhalten der Gase lassen sie sich schwer identifizieren.

Ein Teilchen innerhalb einer Flüssigkeit wird in allen Richtungen von den benachbarten Teilchen angezogen. Somit entsteht eine null Resultierende. Wenn das Teilchen sich an der Oberfläche befindet, wird es von den sehr vielen benachbarten Flüssigkeitsteilchen nach unten und von den wenigen Luftteilchen nach oben gezogen. Somit entsteht eine nach innen gerichteten Resultierende, in Richtung des Fluids, die das Teilchen gefangen hält. Diese ist auch die Ursache für die Anwesenheit der freien Oberfläche.

Die freie Oberfläche verhält sich, als ob in ihrem Inneren eine Spannung entstehen würde, (d.h. als ob diese Oberfläche wie aus einer dünnen Gummischicht bestünde). Diese **Oberflächenspannung** neigt ständig dazu die Oberfläche der Flüssigkeit zu minimieren. Als Beispiel sei ein Wassertropfen im freien Fall erwähnt, der dazu neigt eine Kugelform (d.h. minimale Oberfläche bei einem gegebenen Volumen) zu bilden. Natürlich wirken diesem Verhalten gleichzeitig die Reibungskräfte der Luft entgegen, die den Tropfen charakteristisch d.h. aerodynamisch umformen. Ein anderes Beispiel ist die Kugelform von Seifenblasen.

Die Oberflächenspannung wird definiert durch

$$\sigma = \frac{F}{L} \qquad \text{Einheit} \qquad \frac{N}{m}$$

d.h. durch den Quotient aus angreifender Kraft an der Berandung und der Länge dieser Berandung.

Wir betrachten nun den Fall einer Flüssigkeit in einem Röhrchen. In diesem Fall kommt die Flüssigkeit mit der Röhrchenwand und mit der Luft in Berührung. Die Flüssigkeitsteilchen in der freien Oberfläche werden nun von benachbarten Flüssigkeits-, Wand- und Luftteilchen angezogen. Es hängt davon ab, welche Richtung die Resultierende annimmt, d.h. ob die Anziehungskraft zu den Wandteilchen größer oder kleiner ist als die von den Flüssigkeitsteilchen, so wird die Flüssigkeit im Röhrchen ansteigen oder absinken. Dieses Phänomen heißt **Kapillarität**.

Um die Steighöhe h oder Kapillarhebung zu berechnen, muss man das Kräftegleichgewicht für die Flüssigkeitssäule aufstellen

$$F = G \qquad F = \sigma \cdot L = \sigma \cdot \pi \cdot d \qquad G = m \cdot g = \rho \cdot V \cdot g = \rho \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot h \cdot g$$

$$\sigma = \rho \cdot \frac{d}{4} \cdot h \cdot g \qquad h = \frac{4 \cdot \sigma}{\rho \cdot d \cdot g}$$

wodurch man auch eine einfache Möglichkeit zur Messung der Oberflächenspannung hat.

2. Hydro-, Aerodynamik und Gasdynamik (Strömungen)

Hydrodynamik ist das Teilgebiet der Strömungslehre, das sich mit der Strömung inkompressibler Flüssigkeiten sowie mit Gasströmungen befasst, wenn deren Geschwindigkeit, verglichen mit der Schallgeschwindigkeit, gering ist. Im Grenzfall der Ruhe reduziert sich die Hydrodynamik zur Hydrostatik.

Aerodynamik ist das Teilgebiet der Strömungslehre, das sich mit der Strömung inkompressibler Gasströmungen befasst, wenn deren Geschwindigkeit, verglichen mit der Schallgeschwindigkeit, nicht mehr gering ist.

Gasdynamik ist das Teilgebiet der Strömungslehre, das die Mechanik der Gase unter besonderer Berücksichtigung ihrer Kompressibilität (Zusammendruckbarkeit) beschreibt. Die Kompressibilität macht sich bemerkbar, wenn die Geschwindigkeit der in dem Gas bewegten Körper ansteigt und mit der Schallgeschwindigkeit vergleichbar wird.

Die für die Gasdynamik wichtige Kennzahl ist die Mach-Zahl *(Ma)*

$$Ma = \frac{c}{a}$$

die als Quotient aus Strömungsgeschwindigkeit c und Schallgeschwindigkeit a definiert wird. Die Größe der Mach-Zahl unterscheidet zwischen Strömungsarten:

- $Ma < 1$ **Unterschallströmungen**
- $Ma > 1$ **Überschallströmungen**
- $0{,}8 < Ma < 1{,}2$ **transonische Strömungen**
- $Ma > 1{,}2$ **supersonische Strömungen**
- $Ma > 5$ **hypersonische Strömungen**

Bei **transsonischen** und bei **supersonischen Geschwindigkeiten** ändern sich Strömungsgesetz und Strömungsbild, weil Kopfwellen u.a. Verdichtungsstöße (d.h. unstetige Änderungen von Gasdruck und Gasdichte) auftreten. Bei Erreichen der Schallgeschwindigkeit steigt der Strömungswiderstand stark an (Schallmauer).
Hypersonische oder **Hyperschallströmungen** sind außerdem mit starken Temperaturerhöhungen in der Grenzschicht (die Schicht unmittelbar nah zur Wand) und bei hohen Temperaturen mit Ionisation und Dissoziation der Gasmoleküle (d.h. Zerlegung der Gasmoleküle; Z. B. aus einem Sauerstoffmolekül werden zwei Sauerstoffatome entstehen) verbunden.

2.1. Strömungsgeschwindigkeit

2.1.1. Strömungsfeld, Lagrandgesche und Eulersche Methode

Bei der **Methode von Lagrange** (teilchenfeste Betrachtung) wird das einzelne Teilchen bei seiner Bewegung im Raum verfolgt. Die jeweilige Position des Teilchens ist somit eine Funktion der Anfangslage und der Zeit. Diese Methode ist geeignet, wenn man zum Beispiel die Entwicklung eines in einem Gasvolumen eingespritzten flüssigen Strahls untersuchen möchte. Hier werden die flüssigen Tropfen einzeln betrachtet, um z. B. ihre Bahnen, Masse, Temperatur, Verteilung im Raum usw. zu untersuchen.

Bei der **Methode von Euler** (ortsfeste Betrachtung) wird die Änderung der Strömungsgrößen an einer festen Stelle des Raumes betrachtet, während einzelnen Teilchen vorbeiziehen. Dies entspricht dem Vorgehen bei der Messung mit einem ortsfesten Messgerät (z.B. einem Druckaufnehmer). Als Hinweis: Nur diese Methode wird weiterhin in dieser Vorlesung angewandt.

Für eine Teilcheneigenschaft $f(x,y,z,\tau) = 0$, wobei x, y, z die kartesischen Raumkoordinaten und τ die Zeit bedeuten, liefert die Kettenregel

$$\frac{df}{d\tau} = \frac{\partial f}{\partial \tau} + \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{d\tau} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{d\tau} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{dz}{d\tau} = \frac{\partial f}{\partial \tau} + \frac{\partial f}{\partial x}\cdot u + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot v + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot w = \frac{\partial f}{\partial \tau} + \vec{c}\cdot grad(f)$$

wobei

$$\vec{c} = u\cdot\vec{i} + v\cdot\vec{j} + w\cdot\vec{k}$$

die Strömungsgeschwindigkeit mit ihren Komponenten u, v, w bedeutet. Die Anwendung dieser Kettenregel z. B. für die absolute Temperatur liefert

$$\frac{dT}{d\tau} = \frac{\partial T}{\partial \tau} + \frac{\partial T}{\partial x}\cdot u + \frac{\partial T}{\partial y}\cdot v + \frac{\partial T}{\partial z}\cdot w$$

Hier steht auf der linken Seite die **substantielle** (totale) **Änderung** $\frac{dT}{d\tau}$, während rechts der Term $\frac{\partial T}{\partial \tau}$ die **lokale Änderung** darstellt. Die Differenz beider wird durch den **konvektiven Ausdruck**

$$\frac{dT}{d\tau} - \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial T}{\partial x}\cdot u + \frac{\partial T}{\partial y}\cdot v + \frac{\partial T}{\partial z}\cdot w$$

gebildet, der den Einfluss des Geschwindigkeitsfeldes beschreibt.

2.1.2. Teilchenbahnen und Stromlinien

Teilchenbahnen sind Kurven, die die Teilchen in Lauf der Zeit durcheilen. Sie werden durch folgende Differentialgleichungen (DGl) gegeben:

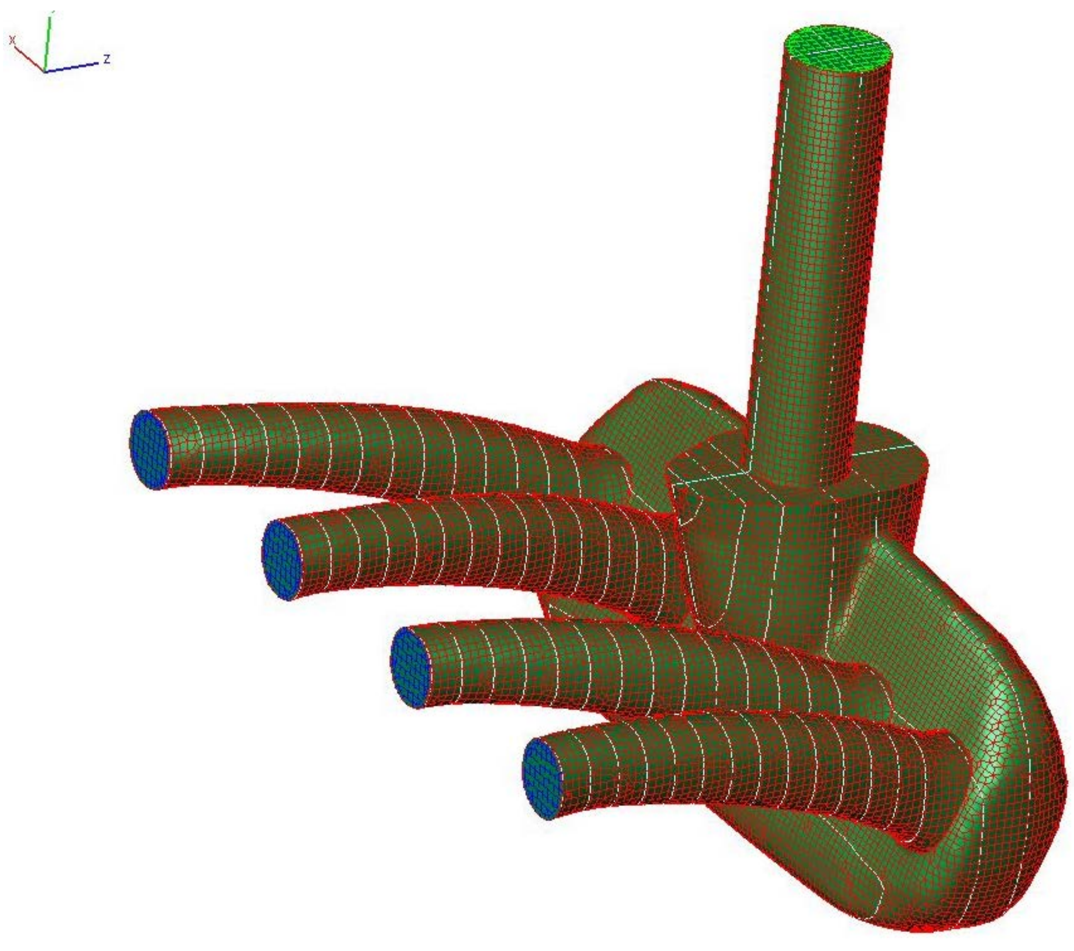
$$\frac{dx}{d\tau} = u(x, y, z, \tau) \qquad \frac{dy}{d\tau} = v(x, y, z, \tau) \qquad \frac{dz}{d\tau} = w(x, y, z, \tau)$$

Wenn die Strömungsgeschwindigkeit bekannt ist, werden die Teilchenbahnen durch Integration ermittelt.

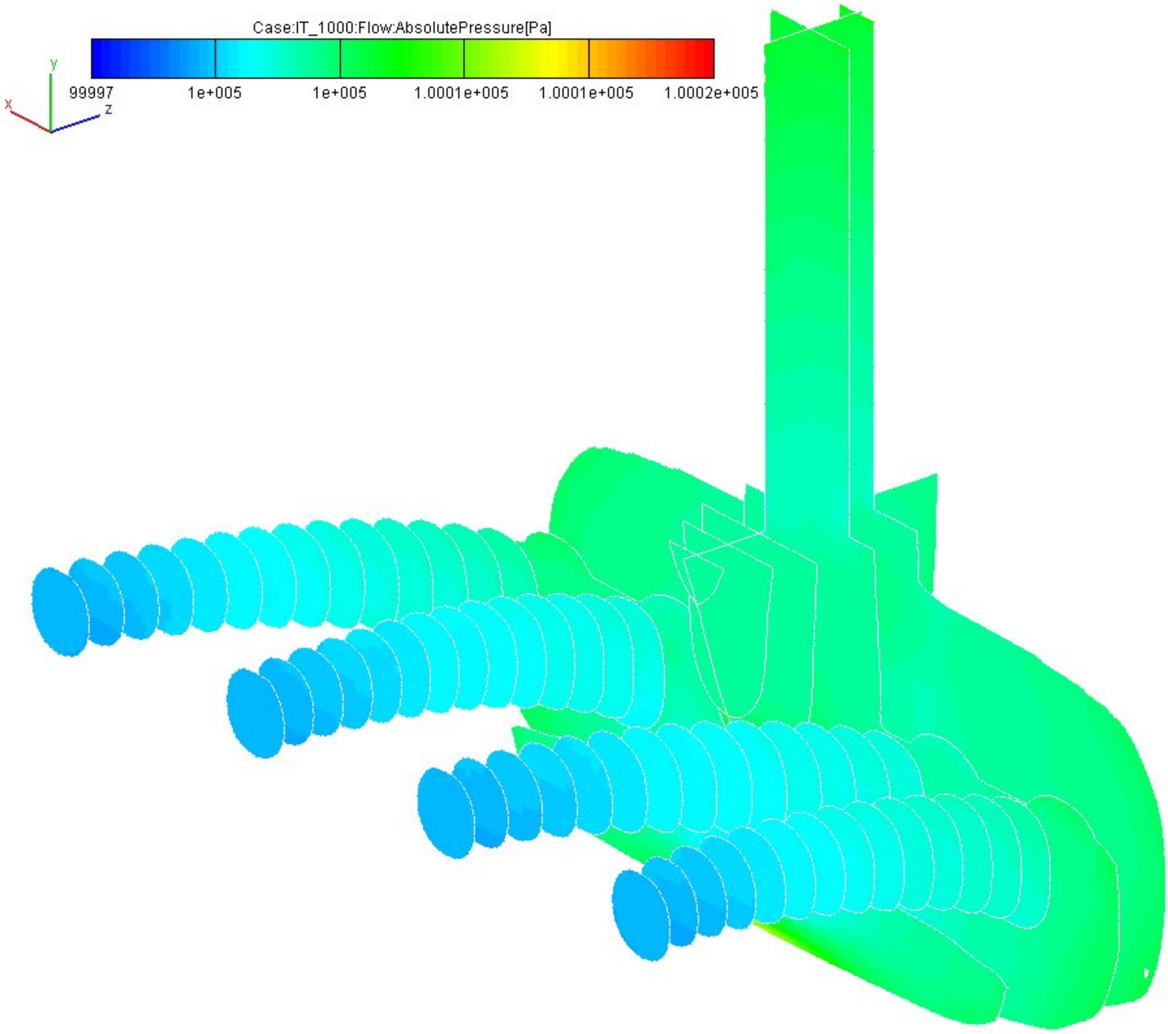
Stromlinien sind Kurven, die zu jedem festen Zeitpunkt auf das Geschwindigkeitsfeld passen. Sie stellen ein momentanes Bild des Geschwindigkeitsfeldes dar. Zu einem späteren Zeitpunkt kann die Gestalt der Stromlinien ganz anders sein, wenn der Strömungsprozess instationär (zeitabhängig) ist.

Als Beispiel wird die stationäre Strömung durch einen **Ansaugkrümmer eines 4 Zylinder-Motors** dargestellt. Die Strömung erfolgt gleichmäßig durch alle vier Ansaugrohre, was beim Einsatz des Ansaugkrümmers am Motor niemals der Fall ist. Diese gleichmäßige Beströmungsart wurde hier gewählt, um die graphische Darstellung zu vereinfachen.

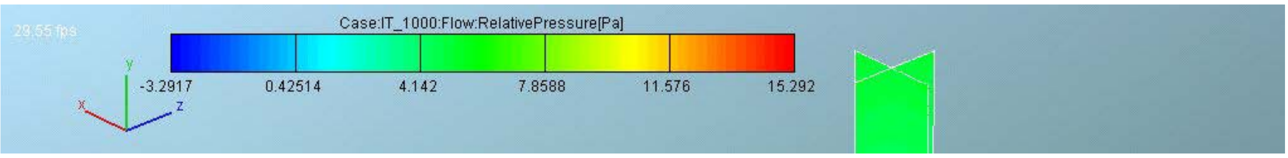
Die Modellierung und Simulationen der Strömungsvorgänge wurde mit Hilfe der CFD-Software FIRE der Fa. AVL GmbH, Graz, Österreich.

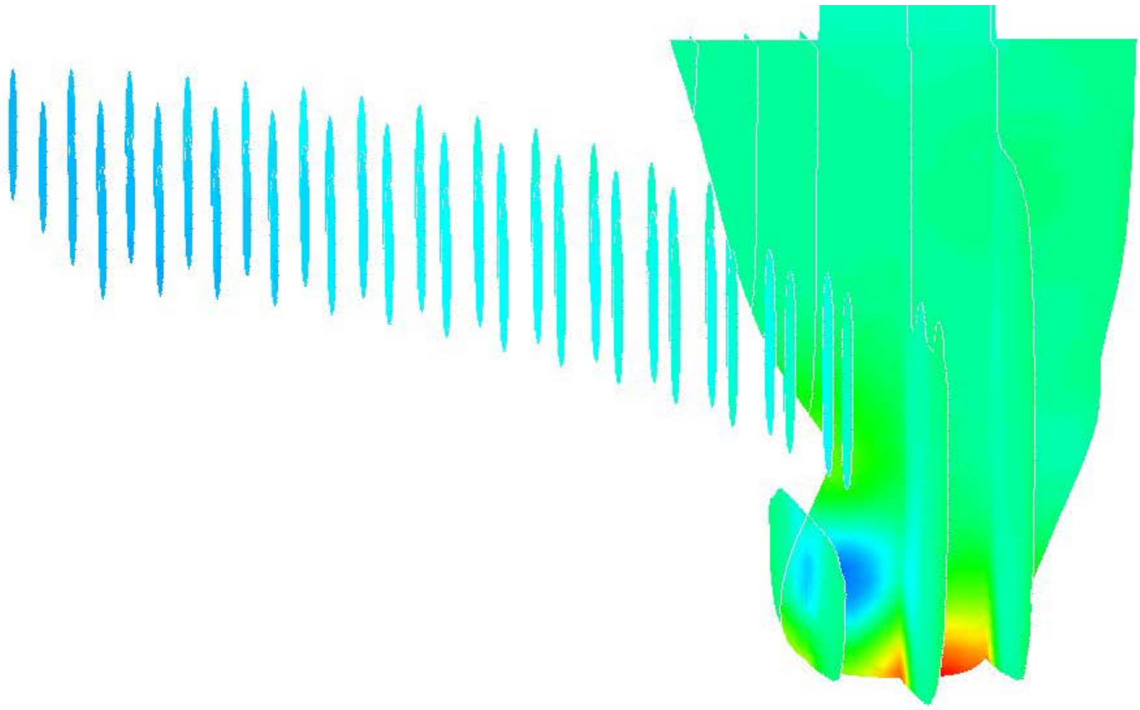


Die Druckverteilung und die Geschwindigkeiten werden in den weißen Schnittebenen dargestellt. Zum Beispiel ergibt sich für den **absoluten Druck** folgendes Bild, wobei die Farbkodierung in Pa dargestellt ist.

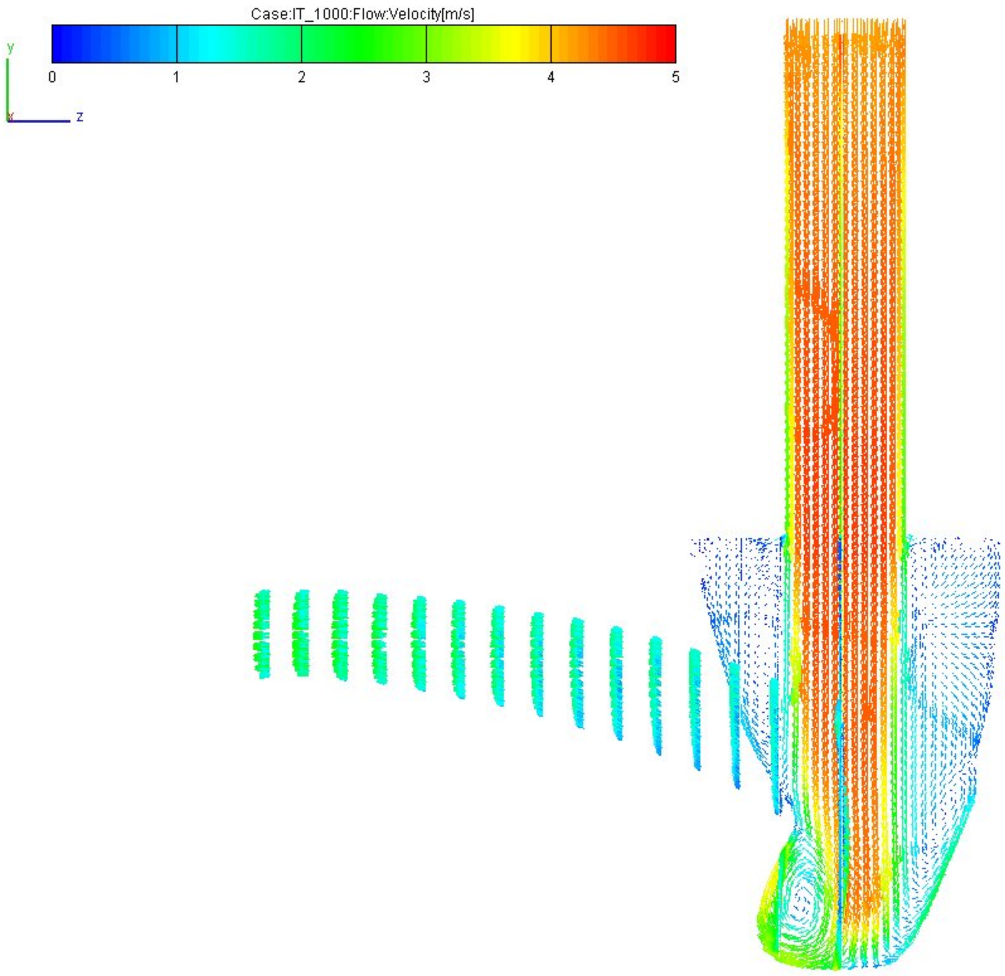


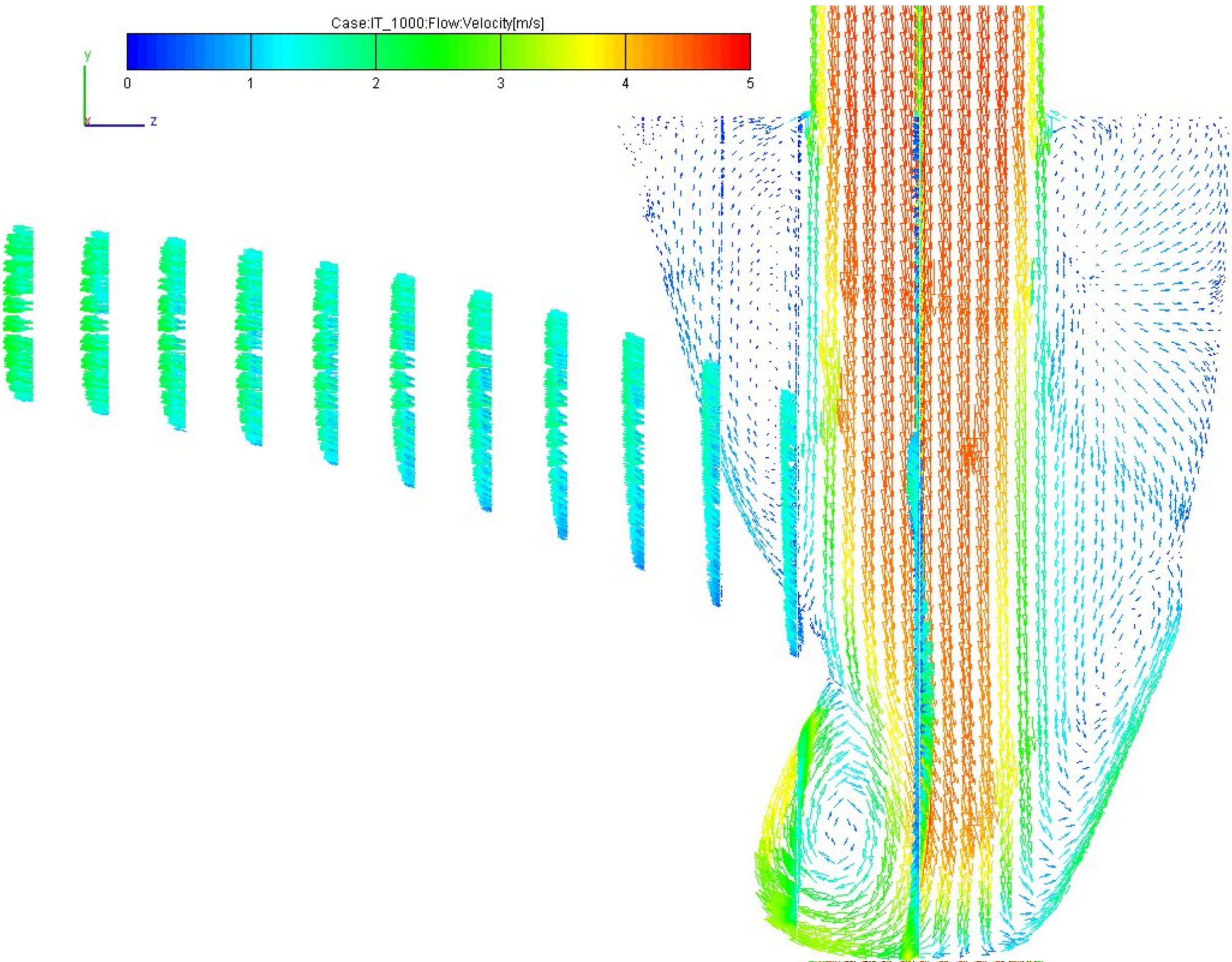
Wie man sieht, ist der Druckunterschied sehr gering, so dass der **Überdruck** (relative pressure) eine genauere Farbkodierung dieser Unterschiede ermöglicht.

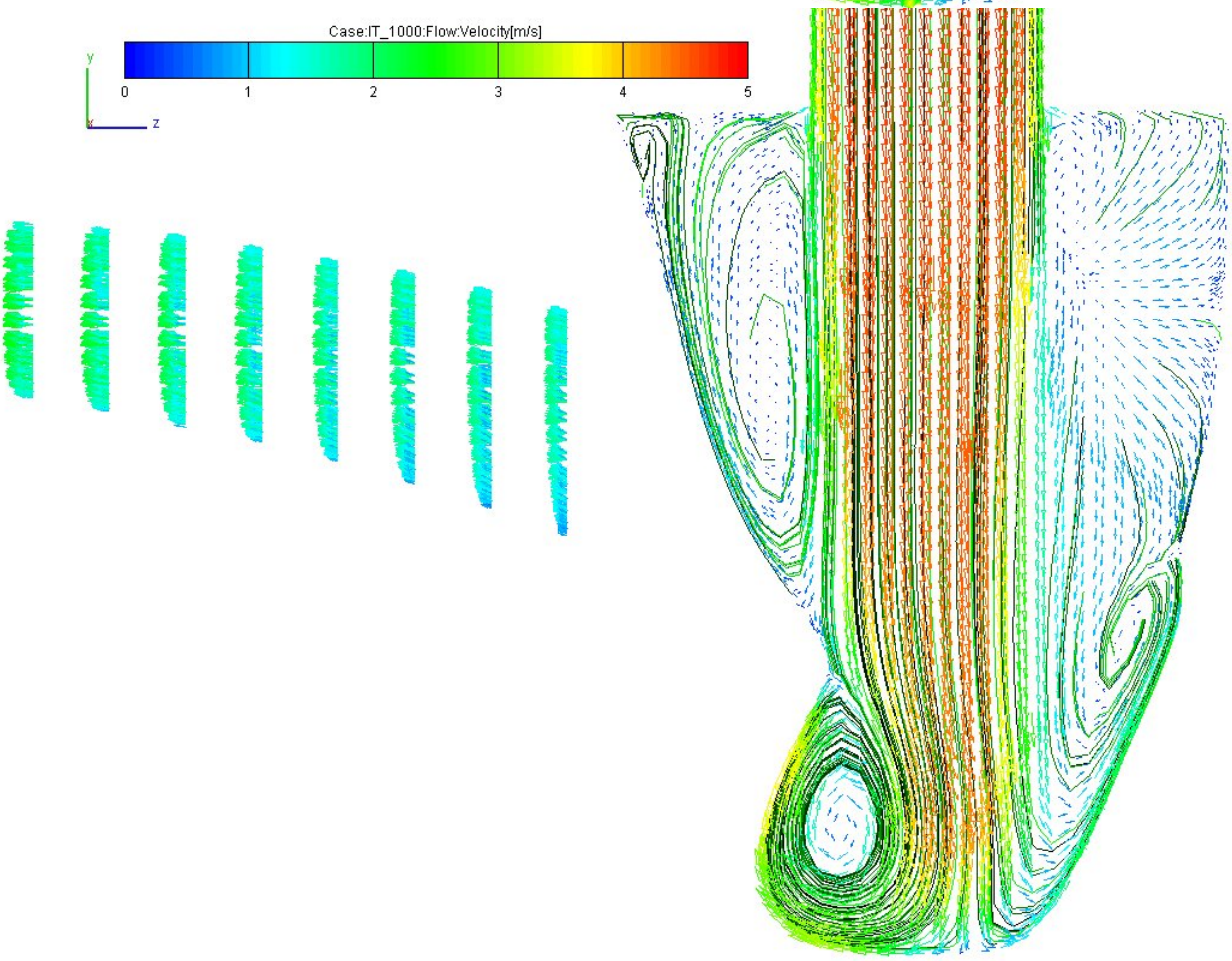


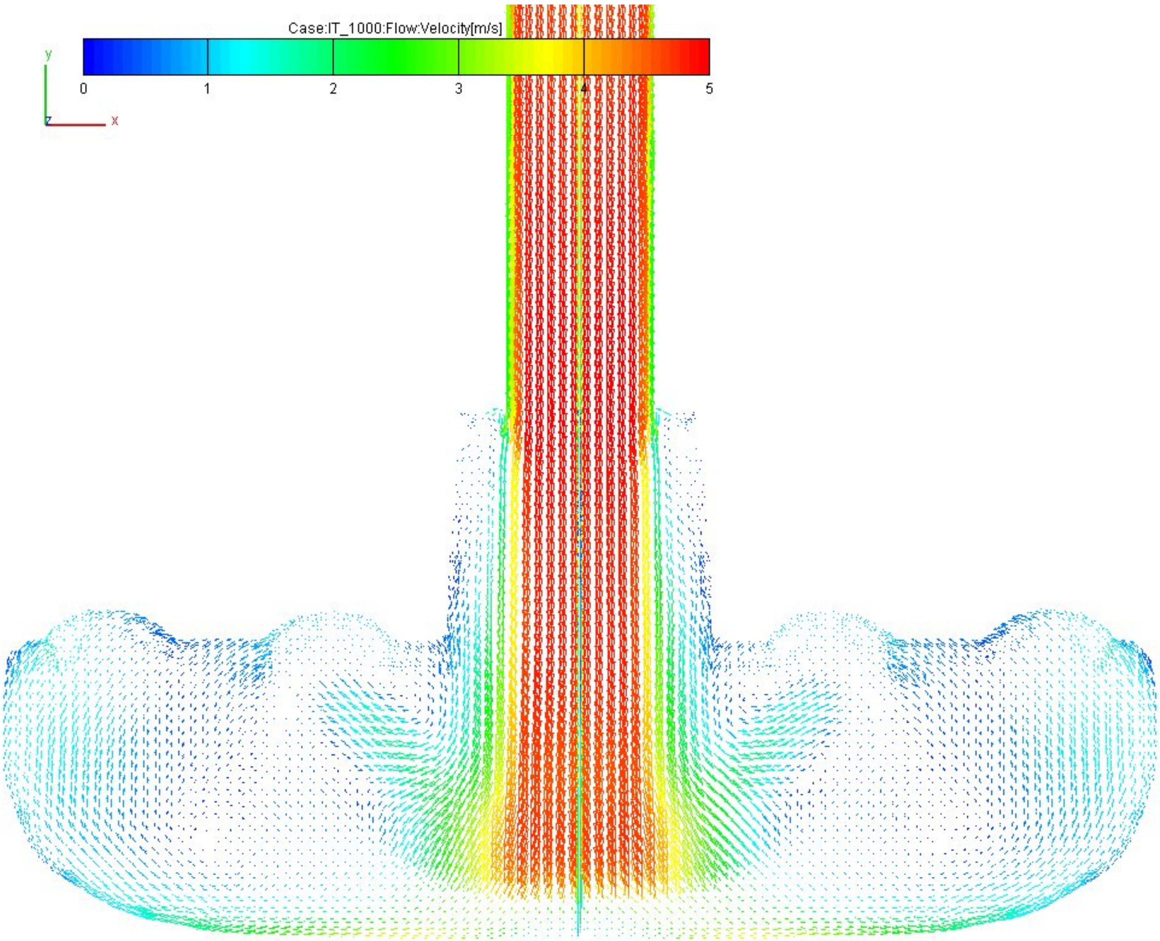


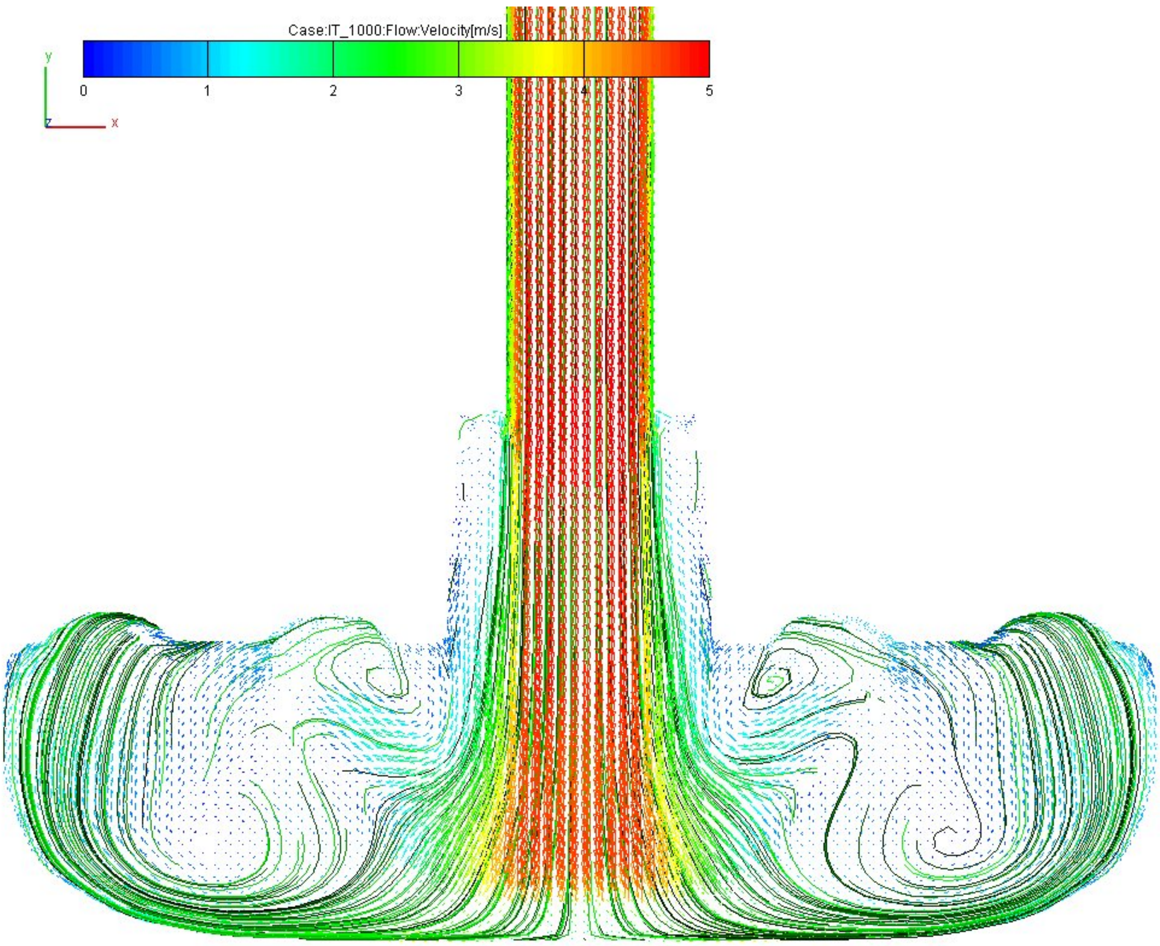
Die Strömungsgeschwindigkeiten werden zuerst allein und nachher mit den Strömlinien in mehreren Schnittebenen und Zoomgraden dargestellt:

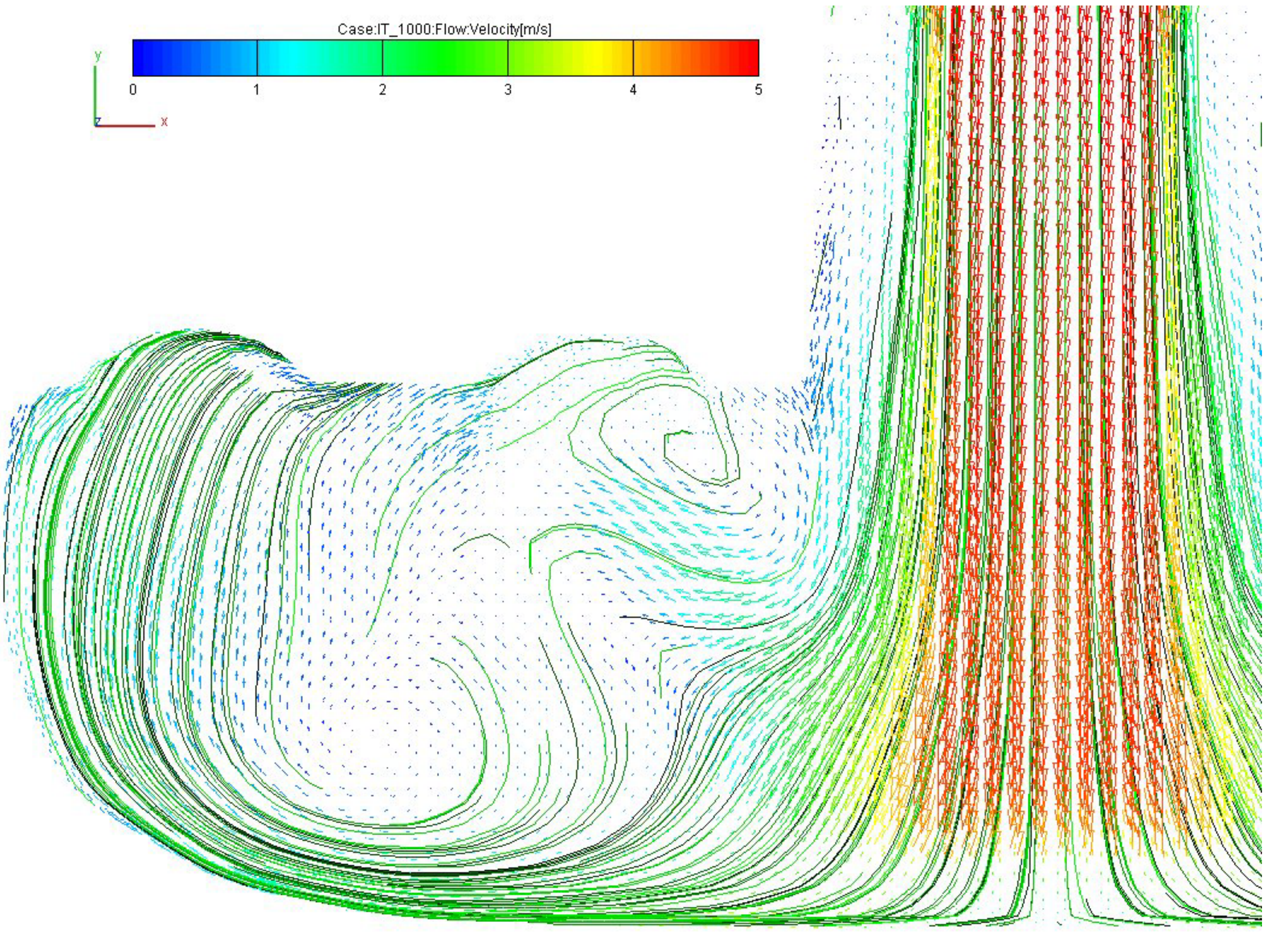


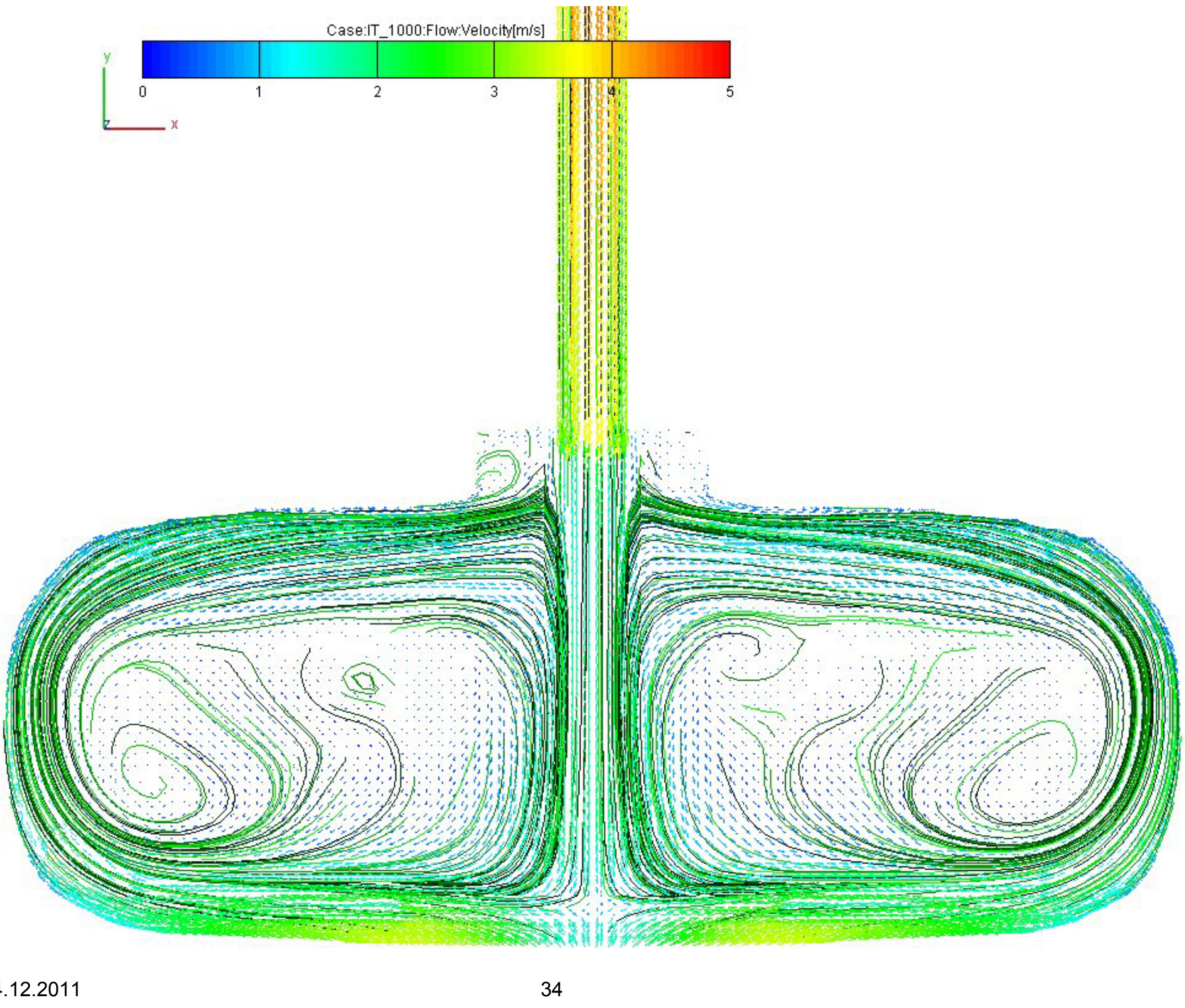

Case:IT_1000:Flow:Velocity[m/s]
0
1
2
3
4
5
y
z


Case:IT_1000:Flow:Velocity[m/s]
0
1
2
3
4
5
y
z


Case:IT_1000:Flow:Velocity[m/s]
0
1
2
3
4
5
y
z
x


Case:IT_1000:Flow:Velocity[m/s]
0
1
2
3
4
5
y
z
x


Case:IT_1000:Flow:Velocity[m/s]
0 1 2 3 4 5
y
x


Case:IT_1000:Flow:Velocity[m/s]
0 1 2 3 4 5
y
x

2.1.3. Volumen- und Massenstrom

Der Volumenstrom wird als

$$\dot{V} = C \cdot A$$

und der Massenstrom als

$$\dot{m} = \rho \cdot C \cdot A = \rho \cdot \dot{V}$$

definiert, wobei C die mittlere Strömungsgeschwindigkeit durch den Querschnitt A und ρ die Dichte an dieser Stelle bedeuten. Wie in den obigen Bildern dargestellt, ist die Strömungsgeschwindigkeit c in einem Querschnitt nicht konstant. Aus diesem Grund wird für die Ermittlung des Massenstroms der Mittelwert der Geschwindigkeit eingesetzt, der als

$$C = \frac{1}{A} \cdot \int_A c \, dA$$

definiert ist.

2.2. Massenerhaltungssatz

Für eine allgemeine Zustandsgröße $Z(\tau, s(\tau))$, wobei τ die Zeit- und s die Raumkoordinate einer **1D-Strömung** bedeuten, werden folgende Vereinbarungen getroffen:

$$\frac{d}{d\tau}Z(\tau,s(\tau)) = \frac{d}{d\tau}Z = Z_\tau + \left(\frac{d}{d\tau}s\right)\cdot Z_S = Z_\tau + c\cdot Z_S$$

Sie ist die substantielle Ableitung von Z, wobei

$$c = \frac{d}{d\tau}s$$

die Strömungsgeschwindigkeit entlang der Stromfadenachse s ist und

$$Z_\tau = \left(\frac{d}{d\tau}Z\right)_{s=const} \qquad Z_S = \left(\frac{d}{ds}Z\right)_{\tau=const}$$

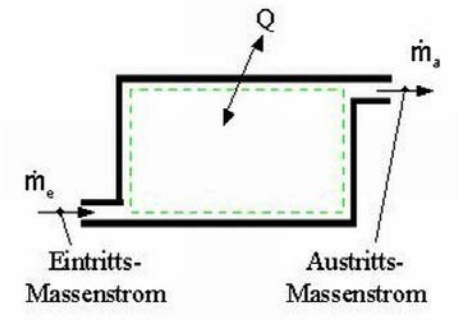
die partiellen Ableitungen der Zustandsgröße $Z(\tau, s(\tau))$ nach der Zeitkoordinate τ bzw. nach der Raumkoordinate s sind.
Als Beispiel kann man die substantielle Ableitung der Dichte in der 1D-Strömung schreiben

$$\frac{d}{d\tau}\rho = \rho_\tau + c\cdot\rho_S$$

2.2.1. Massenerhaltungssatz für (nulldimensionale) 0D-Systeme

Der Massenerhaltungssatz kann für diesen Fall wie folgt formuliert werden:
Die zeitliche Änderung der Fluidmasse m innerhalb des Systems, da hier keine neue Masse kreiert oder vernichtet wird, ist nur von den ein- und austretenden Massenströmen verursacht, d.h.

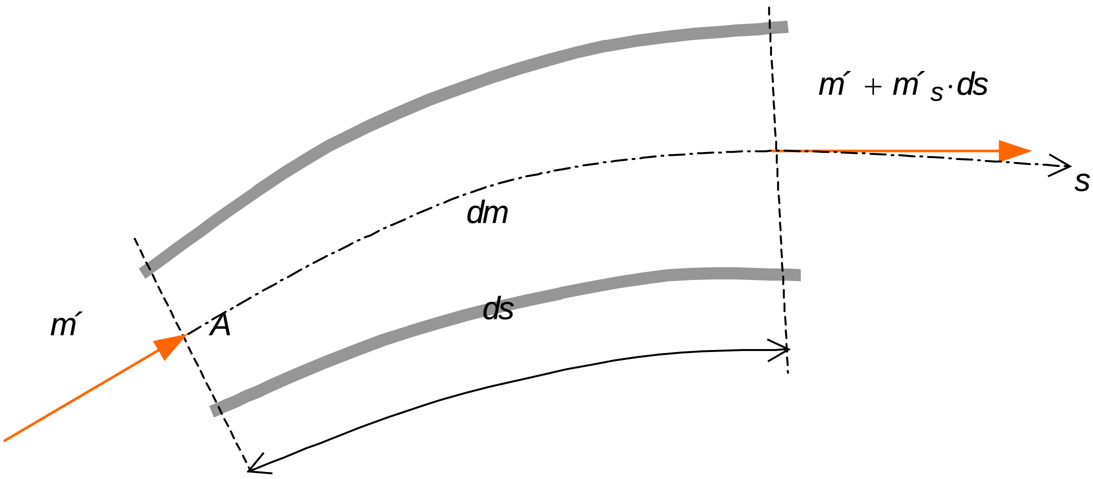
$$\frac{d}{d\tau}m = m\acute{}_e - m\acute{}_a$$



2.2.2. Massenerhaltungssatz für (eindimensionale) 1D-Systeme

Der Massenerhaltungssatz kann für diesen Fall wie folgt formuliert werden:
Die zeitliche Änderung der Fluidmasse m innerhalb des Fluidelements, da hier keine neue Masse kreiert oder vernichtet wird, ist nur von den ein- und austretenden Massenströmen verursacht, d.h.

$$\left(\frac{d}{d\tau}m\right)_{s=const} = m'_{ein} - m'_{aus}$$



Da die Elementlänge ds unendlich klein ist, kann die Änderung des Massenstroms entlang der Raumkoordinate s als eine lineare Funktion betrachtet werden. Somit gilt für den austretenden Massenstrom

$$m'_{aus} = m'_{ein} + \left(\frac{d}{ds}m'\right)_{\tau=const} \cdot ds = m' + m'_s \cdot ds$$

wobei

$$m'_{ein} = m'$$

und

$$\left(\frac{d}{ds}m'\right)_{\tau=const}$$

die Steigung der Massenstromfunktion entlang der Raumkoordinate bedeuten.
Setzt man diese Teilausdrücke in die Bilanzformel ein, so ergibt sich

$$(\rho \cdot A \cdot ds)_\tau = m' - (m' + m'_s \cdot ds)$$

wobei die Elementmasse durch

$$dm = \rho \cdot dV = \rho \cdot A \cdot ds$$

ersetzt wurde. Da die Elementlänge in der Gleichung zeitlich unabhängig ist

$$(\rho \cdot A \cdot ds)_\tau = (\rho \cdot A)_\tau \cdot ds$$

gilt nach dem Kürzen durch ds

$$(\rho \cdot A)_\tau + (\rho \cdot A \cdot c)_s = 0 \qquad \text{oder} \qquad \left[\frac{d}{d\tau}(\rho \cdot A)\right]_{s=const} + \left[\frac{d}{ds}(\rho \cdot A \cdot c)\right]_{\tau=const} = 0$$

2.2.2.1. Fall der stationären Strömung

Der Massenerhaltungssatz wird im Falle einer **stationären** Strömung wegen

$$(\rho \cdot A)_\tau = 0$$

(d.h. keine zeitliche Änderung) zu

$$(\rho \cdot A \cdot c)_s = 0 \qquad\qquad m'_s = 0$$

Nach der Integration zwischen zwei Querschnitten entlang der Strömungsrichtung ergibt sich

$$(\rho \cdot A \cdot c)_1 = (\rho \cdot A \cdot c)_2 \qquad m'_1 = m'_2 = m' = const$$

2.2.2.2. Fall des konstanten Rohrquerschnittes

Der Massenerhaltungssatz wird im Falle eines konstanten Rohr- bzw. Stromfaden-Querschnittes, d.h. $A = const$, wird zu

$$\rho_\tau + (\rho \cdot c)_s = 0$$

2.2.2.3. Fall des inkompressiblen Fluids

Der Massenerhaltungssatz wird im Falle eines inkompressiblen Fluids, d.h. $\rho = const$, durch Kürzen der Dichte zu

$$A_\tau + (A \cdot c)_s = 0 \qquad A_\tau + V'_s = 0$$

wobei V' der Volumenstrom ist. Wenn die Strömung zusätzlich **stationär** erfolgt, dann ist der Volumenstrom in allen Rohrquerschnitten gleich groß, d.h.

$$V'_1 = V'_2 = V' = const$$

2.2.2.4. Massenerhaltungssatz für (dreidimensionale) 3D-Systeme

Der Massenerhaltungssatz wird für eine dreidimensionale Strömung zu

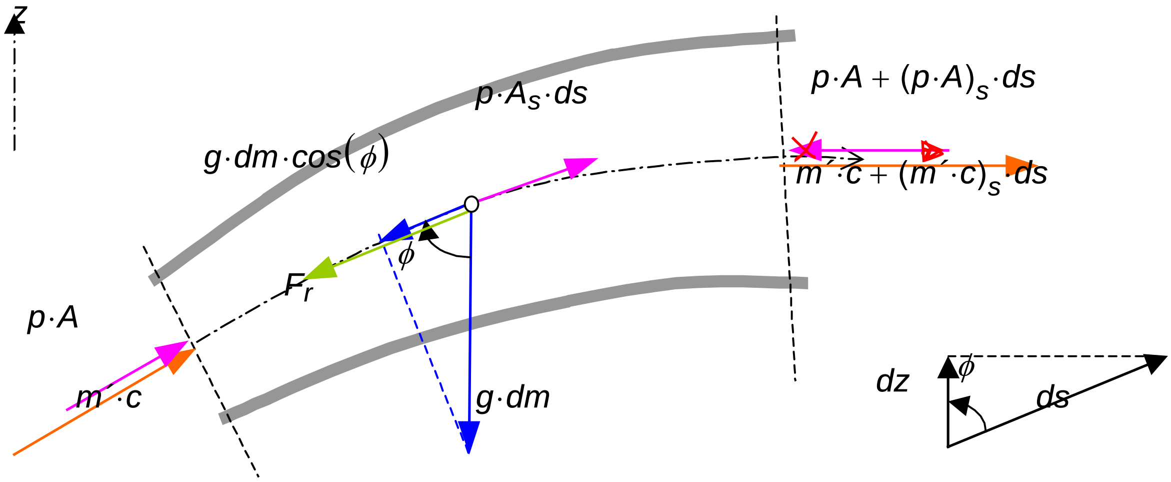
$$\rho_\tau + (\rho \cdot u)_x + (\rho \cdot v)_y + (\rho \cdot w)_z = 0$$

wobei u, v, w die Geschwindigkeitskomponenten der Achsenkoordinaten x, y, z sind.

2.3. Eulersche Bewegungsgleichungen oder Impulserhaltungssatz

2.3.1. Eulersche Bewegungsgleichung für 1D-Systeme

Die Eulersche Bewegungsgleichung heißt im Falle der 1D-Strömung auch **Impulserhaltungssatz** oder **Kräftegleichgewicht** entlang des Stromfadens und ist auch bekannt als **Bernoulli-Gleichung**.



Der Impulserhaltungssatz drückt aus, dass die zeitliche Änderung des Impulses des Fluidelements durch die ausgetauschten Impulsströme und von den angreifenden Kräften (s. Bild) verursacht wird. Somit kann man schreiben

$$\begin{aligned}(m \cdot c)_t = {} & m' \cdot c - \left[m' \cdot c + (m' \cdot c)_s \cdot ds \right] \ldots && = \text{ein- und austretende Impulsströme} \\ & + p \cdot A - \left[p \cdot A + (p \cdot A)_s \cdot ds \right] \ldots && = \text{Druckkräfte auf den Querschnitten} \\ & + p \cdot A_S \cdot ds \ \ldots && = \text{Mantelwandreaktion auf das Fluidelement} \\ & + (-g) \cdot dm \cdot \cos(\phi) \ \ldots && = \text{Gewichtskraftkomponente entlang von } s \\ & + (-\lambda) \cdot \frac{ds}{D_H} \cdot \frac{\rho \cdot c \cdot |c|}{2} \cdot A && = \text{Strömungswiderstandskraft } F_r .\end{aligned}$$

In der Formel der Strömungswiderstands-Kraft

$$F_r = \lambda \cdot \frac{ds}{D_H} \cdot \frac{\rho \cdot c \cdot |c|}{2} \cdot A$$

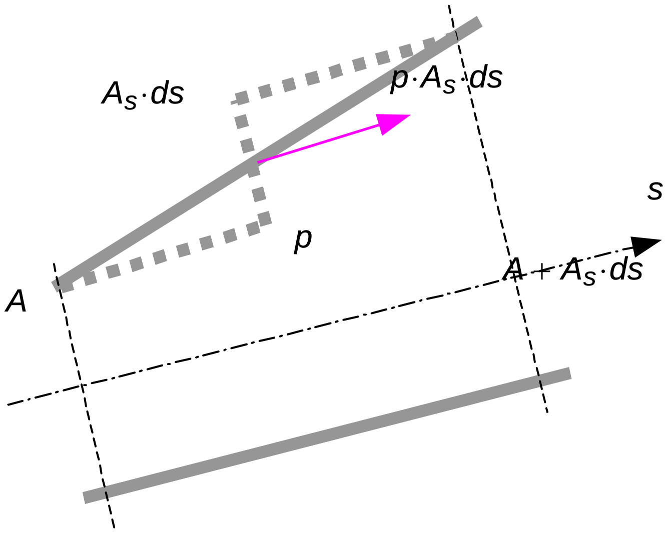
bedeutet λ der **Koeffizient der** auf Stromfadenlänge bzw. Rohrlänge **verteilten Strömungsverluste** und D_H der **hydraulische Durchmesser** des Stromfadens bzw. Rohres. Der hydraulische Durchmesser ist durch

$$D_H = \frac{4 \cdot Querschnittsfläche}{Querschnittsumfang} = \frac{4 \cdot A}{U}$$

definiert. Als Beispiel gilt für einen Kreisquerschnitt

$$D_H = \frac{4 \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4}}{\pi \cdot D} = D,$$

d.h. für diesen Querschnitt gibt es keinen Unterschied zwischen dem üblichen Rohrdurchmesser und dem hydraulischem Durchmesser. Der hydraulische Durchmesser wird für Rohre mit von Kreisform abweichenden Querschnitten verwendet, um die Strömungsverluste auch in diesem Fall ermitteln zu können. Er ist somit ein **Ähnlichkeitskriterium** und erlaubt Ergebnisse von Untersuchungen mit Kreisrohren für alle anderen Rohrarten zu extrapolieren.
Die Entstehung der **Mantelwandreaktion** auf das Fluidelement ist im nächsten Bild demonstriert. Die Steigerung des Querschnittes entlang des Elementes kann nur auf eine Elementseite und statt als uniformer (durchgezogene Linie) schon als plötzlicher (gestrichene Linie) Verlauf dargestellt.
Hinweis: Der Querschnittsverlauf innerhalb des Elements ist sowieso nicht wichtig, da hier nur die Randwerte des Querschnittes wichtig sind, in denen das Integral ausgewertet wird.
Nun kann man deutlich erkennen, dass die Querschnittsänderung (hier Erweiterung) durch eine Kraftkomponente (Wandreaktion auf Druckkraft des Fluids) auf das Fluidelement wirkt. Alle anderen ähnlichen Kraftkomponenten, d.h. als Wandreaktionen auf Druckkraft des Fluids, heben sich gegenseitig auf.



Nach Vereinfachungen in der Impulsbilanzgleichung

$$(m \cdot c)_t = -(m' \cdot c)_s \cdot ds - (p \cdot A)_s \cdot ds + p \cdot A_s \cdot ds - g \cdot dm \cdot z_s - \lambda \cdot \frac{ds}{D_H} \cdot \frac{\rho \cdot c \cdot |c|}{2} \cdot A$$

und weitere Bearbeitungen, ergeben

$$(m \cdot c)_t + (m' \cdot c)_s \cdot ds + (p \cdot A)_s \cdot ds = p \cdot A_s \cdot ds - g \cdot dm \cdot z_s - \lambda \cdot \frac{ds}{D_H} \cdot \frac{\rho \cdot c \cdot |c|}{2} \cdot A$$

Setzt man nun die Ausdrücke der Elementmasse und des Massenstroms in

$$(\rho \cdot A \cdot c)_t \cdot ds + (\rho \cdot A \cdot c \cdot c)_s \cdot ds + (p \cdot A)_s \cdot ds = p \cdot A_s \cdot ds - g \cdot \rho \cdot A \cdot z_s \cdot ds - \lambda \cdot \frac{ds}{D_H} \cdot \frac{\rho \cdot c \cdot |c|}{2} \cdot A$$

ein und kürzt man ds dort, so ergibt sich die Gleichung des Impulserhaltungssatzes

$$\left(\rho\cdot A\cdot c\right)_t + \left(\rho\cdot A\cdot c\cdot c\right)_s + \left(p\cdot A\right)_s = p\cdot A_s - g\cdot\rho\cdot A\cdot z_s - \lambda\cdot\frac{A}{D_H}\cdot\frac{\rho\cdot c\cdot|c|}{2}$$

Diese Gleichung kann weiter zusammengefasst werden, und resultiert zu

$$\left(\rho\cdot A\cdot c\right)_t + \left(\rho\cdot A\cdot c^2 + p\cdot A\right)_s = p\cdot A_s - g\cdot\rho\cdot A\cdot z_s - \lambda\cdot\frac{A}{D_H}\cdot\frac{\rho\cdot c\cdot|c|}{2}$$

2.3.1.1. Bernoulli-Gleichung für inkompressible u. kompressible Fluide

Die Gl. des Massenerhaltungssatzes (d.h. der Kontinuitätsgleichung)

$$\left(\rho\cdot A\right)_t + \left(\rho\cdot A\cdot c\right)_s = 0 \qquad (1)$$

und die Gl. des Kräftegleichgewichtes entlang des Stromfadens (Eulersche Bewegungsgleichung)

$$\left(\rho\cdot A\cdot c\right)_\tau + \left(\rho\cdot A\cdot c^2 + p\cdot A\right)_s = p\cdot A_s - g\cdot\rho\cdot A\cdot z_s - \lambda\cdot\frac{A}{D_H}\cdot\frac{\rho\cdot c\cdot|c|}{2} \qquad (2)$$

führen nach entsprechender Bearbeitung zur Bernoulli-Gleichung.

Die partiellen Ableitungen aus dem linkem Glied der Dgl. (2) lassen sich wie folgt entwickeln:

$$\begin{aligned}&\left[c\cdot\left(\rho\cdot A\right)_t + \left(\rho\cdot A\right)\cdot c_\tau\right]\ldots \\ &+\left[c\cdot\left(\rho\cdot A\cdot c\right)_s + \left(\rho\cdot A\cdot c\right)\cdot c_s + p\cdot A_s + A\cdot p_s\right]\end{aligned} = p\cdot A_s - g\cdot\rho\cdot A\cdot z_s - \lambda\cdot\frac{A}{D_H}\cdot\frac{\rho\cdot c\cdot|c|}{2}$$

Fasst man nach Strömungsgeschwindigkeit und Druck zusammen, ergibt sich

$$c\cdot\left[\left(\rho\cdot A\right)_\tau + \left(\rho\cdot A\cdot c\right)_s\right] + \left(\rho\cdot A\right)\cdot c_t + \left(\rho\cdot A\cdot c\right)\cdot c_s + A\cdot p_s = -g\cdot\rho\cdot A\cdot z_s - \lambda\cdot\frac{A}{D_H}\cdot\frac{\rho\cdot c\cdot|c|}{2}$$

Die Summe aus erster Klammer ist gemäß Dgl. (1) null und verschwindet. Dividiert man den Rest der Gleichung durch $\left(\rho\cdot A\right)$ so resultiert

$$c_\tau + c\cdot c_s + \frac{1}{\rho}\cdot p_s = -g\cdot z_s - \frac{\lambda}{D_H}\cdot\frac{c\cdot|c|}{2} \qquad (3)$$

Die Dgl. (3) ist keine neue Gleichung sonder nur eine andere Form der Dgl. (2). Somit kann man sofort erkennen, dass **die Größe und die Änderung des Rohr-Querschnittes in dieser Gleichung keine Rolle spielt**.

Wird nun die Dgl. (3) **nur** entlang einer Stromlinie (d.h. nach "s") integriert

$$\int_1^2 c_\tau\,ds + \int_1^2 c\,dc + \int_1^2 \frac{1}{\rho}\,dp = -\int_1^2 g\,dz - \int_1^2 \frac{\lambda}{D_H}\cdot\frac{c\cdot|c|}{2}\,ds$$

ergibt sich nach entsprechender Bearbeitung die Bernoulli-Gleichung:

$$\int_1^2 c_\tau\,ds + \frac{\left(c_2\right)^2 - \left(c_1\right)^2}{2} + \int_1^2 \frac{1}{\rho}\,dp = -g\left(z_2 - z_1\right) - \lambda\cdot\frac{L_{12}}{D_H}\cdot\frac{c_{12}\cdot|c_{12}|}{2} \qquad (4)$$

Wobei L_{12} die Länge des Stromfadens ist und c_{12} die mittlere Strömungsgeschwindigkeit zwischen den Querschnitten 1 und 2.

- Im Falle einer stationären Strömung ist $\int_1^2 c_\tau \, ds = 0$. Weiterhin wird fast nur dieser Fall behandelt.
- Im Falle einer verlustfreien Strömung ist $\lambda = 0$.
- Im Falle von Gasströmungen wird üblicherweise der Einfluss der Lage im Gravitationsfeld vernachlässigt, d.h. $g(z_2 - z_1) = 0$.

Der Term $y_{12} = \int_1^2 \frac{1}{\rho} dp$ ist die Druckänderungsarbeit.

Somit hängt ihr Ausdruck von der Art der Zustandsänderung zwischen den Zuständen (bzw. Punkten oder Querschnitten) 1 und 2 ab.

2.3.1.1.1. Bernoulli-Gleichung für eine inkompressible Strömung eines inkompressiblen Fluids

In diesem Fall gilt:

- für eine stationäre Strömung, wobei die Strömungsbeschleunigung null ist, und
- für ein inkompressibles Fluid $\rho = const$ d.h. $\rho_1 = \rho_2$.

Nach der Trennung der Zustände ergibt sich einer der folgenden drei Gleichungen:

$$\frac{(c_1)^2}{2} + \frac{p_1}{\rho_1} + g \cdot z_1 = \frac{(c_2)^2}{2} + \frac{p_2}{\rho_2} + g \cdot z_2 + \lambda \cdot \frac{L_{12}}{D_H} \cdot \frac{c_{12} \cdot |c_{12}|}{2} \qquad (5')$$

wobei λ der Widerstandsbeiwert, c_{12} die mittlere Geschwindigkeit, L_{12} der Abstand und $D_H = \frac{4 \cdot Querschnitt}{Umfang}$ der mittlere hydraulische Durchmesser zwischen den Strömungsquerschnitten 1 und 2 bedeuten.

Alle Terme aus Gl. (5') sind in der Einheit $\frac{m^2}{s^2} = \frac{J}{kg}$ geschrieben und bedeuten somit **spezifische Energien**.

$$\frac{\rho_1 (c_1)^2}{2} + p_1 + \rho_1 \cdot g \cdot z_1 = \frac{\rho_2 (c_2)^2}{2} + p_2 + \rho_2 \cdot g \cdot z_2 + \lambda \cdot \frac{L_{12}}{D_H} \cdot \frac{\rho_2 \cdot c_{12} \cdot |c_{12}|}{2} \qquad (5'')$$

Alle Terme aus Gl. (5'') sind in der Einheit $\frac{N}{m^2} = Pa$ geschrieben und bedeuten somit **Drücke**.

$$\frac{(c_1)^2}{2\cdot g}+\frac{p_1}{\rho_1\cdot g}+z_1=\frac{(c_2)^2}{2\cdot g}+\frac{p_2}{\rho_2\cdot g}+z_2+\frac{\lambda}{g}\cdot\frac{L_{12}}{D_H}\cdot\frac{c_{12}\cdot|c_{12}|}{2} \qquad (5''')$$

Alle Terme aus Gl. (5''') sind in der Einheit m geschrieben und bedeuten somit **Steighöhen**.
Vernachlässigt man die Strömungsverluste und die Änderung der potentiellen Energie im Gravitationsfeld, ergibt sich für die Berechnung der **Strömungsgeschwindigkeit**

$$c_1=\sqrt{(c_2)^2+\frac{2\cdot(p_2-p_1)}{\rho_1}}$$

oder im Falle, dass die Umgebung oder ein großer Behälter den Zustand 2 darstellen (und somit $c_2=0$), gilt dann

$$c=\sqrt{\frac{2\cdot\Delta p}{\rho}}$$

Man muss an dieser Stelle beachten, dass durch diese Formel keine obere Begrenzung für die Strömungsgeschwindigkeit besteht. In Wirklichkeit, wird weiter unter vorgestellt, das sie die Schallgeschwindigkeit nur in einzelnen Fällen (z.B. einer Laval-Düse) übersteigen.

2.3.1.1.2. Bernoulli-Gleichung für eine (kompressible) isotherme stationäre Strömung eines Idealgases

In diesem Fall gilt:

- für eine stationäre Strömung $\int_1^2 c_\tau\, ds=0$ (d.h. die Strömungsbeschleunigung ist null), und
- für eine isotherme Zustandsänderung $T=const$ eines Idealgases, d.h. $\frac{p}{\rho}=const$.

Die Druckänderungsarbeit auf eine Isotherme (s. auch §1.3.3.8.3.c) wird nach $\frac{p_1}{\rho_1}=\frac{p}{\rho}$ d.h. $\frac{1}{\rho}=\frac{p_1}{\rho_1}\cdot\frac{1}{p}$ zu

$$y_{12}=\int_1^2\frac{1}{\rho}\,dp=\int_1^2\frac{p_1}{\rho_1}\cdot\frac{1}{p}\,dp=\frac{p_1}{\rho_1}\cdot\int_1^2\frac{1}{p}\,dp=\frac{p_1}{\rho_1}\cdot ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right)$$

Setzt man das Ergebnis in (4) ein, so ergibt sich

$$\frac{(c_2)^2-(c_1)^2}{2}+\frac{p_1}{\rho_1}\cdot ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right)=-g(z_2-z_1)-\lambda\cdot\frac{L_{12}}{D_H}\cdot\frac{c_{12}\cdot|c_{12}|}{2}$$

Nach der Trennung der Zustände ergibt sich

$$\frac{(c_1)^2}{2}+\frac{p_1}{\rho_1}\cdot ln(p_1)+g\cdot z_1=\frac{(c_2)^2}{2}+\frac{p_2}{\rho_2}\cdot ln(p_2)+g\cdot z_2+\lambda\cdot\frac{L_{12}}{D_H}\cdot\frac{c_{12}\cdot|c_{12}|}{2} \qquad (6')$$

oder

$$\frac{(c_1)^2}{2}+g\cdot z_1=\frac{(c_2)^2}{2}+\frac{p_2}{\rho_2}\cdot ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right)+g\cdot z_2+\lambda\cdot\frac{L_{12}}{D_H}\cdot\frac{c_{12}\cdot|c_{12}|}{2} \qquad (6'')$$

Vernachlässigt man die Strömungsverluste, d.h. $\lambda = 0$, und die Änderung der potentiellen Energie im Gravitationsfeld, d.h. $g\cdot(z_2-z_1)=0$, ergibt sich für die Berechnung der **Strömungsgeschwindigkeit**

$$c_1=\sqrt{(c_2)^2+\frac{2\cdot p_2}{\rho_2}\cdot ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right)}$$

2.3.1.1.3. Bernoulli-Gleichung für eine (kompressible) isentrope stationäre Strömung eines Idealgases

In diesem Fall gilt:

- für eine stationäre Strömung $\int_1^2 c_\tau\, ds = 0$ (d.h. die Strömungsbeschleunigung ist null),
- für eine isentrope Zustandsänderung $s = const$ eines Idealgases, d.h. $\frac{p}{\rho^\kappa} = const$, und
- für eine isentrope Strömung sind alle Verluste null, d.h. $\lambda = 0$.

Die Druckänderungsarbeit wird in diesem Fall (s. §1.3.3.8.3.e) zu

$$y_{12}=\frac{\kappa}{\kappa-1}\cdot\frac{p_1}{\rho_1}\cdot\left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}-1\right]$$

Setzt man das Ergebnis in (4) ein, so ergibt sich

$$\frac{(c_2)^2-(c_1)^2}{2}+\frac{\kappa}{\kappa-1}\cdot\frac{p_1}{\rho_1}\cdot\left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}-1\right]=-g(z_2-z_1)$$

oder

$$\frac{(c_2)^2-(c_1)^2}{2}+\frac{\kappa}{\kappa-1}\cdot\frac{(p_1)^{\frac{1}{\kappa}}}{\rho_1}\cdot\left[(p_2)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}-(p_1)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right]=-g(z_2-z_1)$$

Nach der Trennung der Zustände ergibt sich

$$\frac{(c_1)^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa - 1} \cdot \frac{p_1}{\rho_1} + g \cdot z_1 = \frac{(c_2)^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa - 1} \cdot \frac{p_2}{\rho_2} + g \cdot z_2 \qquad (7')$$

oder

$$\frac{(c_1)^2}{2} + \frac{(a_1)^2}{\kappa - 1} + g \cdot z_1 = \frac{(c_2)^2}{2} + \frac{(a_2)^2}{\kappa - 1} + g \cdot z_2 \qquad (7'')$$

wobei $a = \sqrt{\frac{\kappa \cdot p}{\rho}}$ die **Schallgeschwindigkeit** in der Strömung und κ der Isentropenexponent zwischen den Zuständen 1 und 2 bedeuten.

Die **Schallgeschwindigkeit** ist die größte Geschwindigkeit, die die Strömung durch **eine einfache Düse** erreichen kann. Sie ist definiert durch

$$a^2 = \left(\frac{dp}{d\rho}\right)_s$$

Für ein Idealgas gilt auf der Isentropen

$$\frac{p}{\rho^\kappa} = const$$

und somit

$$p = \rho^\kappa \cdot const$$

Nach dem Einsetzen und Ableiten in Bezug auf Dichte ergibt sich

$$a^2 = \frac{d}{d\rho}\left(\rho^\kappa \cdot const\right) = \kappa \cdot \rho^{\kappa-1} \cdot const = \kappa \cdot \rho^{\kappa-1} \cdot \frac{p}{\rho^\kappa} = \frac{\kappa \cdot p}{\rho}$$

Wenn zusätzlich die thermische Zustandsgleichung eingesetzt wird, resultiert für die Schallgeschwindigkeit

$$a = \sqrt{\frac{\kappa \cdot p}{\rho}} = \sqrt{\kappa \cdot R \cdot T} = \sqrt{\kappa \cdot \frac{R_m}{M} \cdot T}$$

Der Quotient aus Strömungs- und Schallgeschwindigkeit heißt **Mach-Zahl** $Ma = \frac{c}{a}$ (zu Ehren von Ernst Mach). Nach der Größe dieser charakteristischen Kennzahl kann man zwischen

- **Unterschall**strömungen mit $Ma < 1$ und
- **Überschall**strömungen mit $Ma > 1$

unterscheiden.

2.3.1.2. Anwendungen der Bernoulli-Gleichung im Falle einer stationären Strömung

2.3.1.2.1. Verschiedene Begriffe und Messung des Druckes eines inkompressiblen Fluids

2.3.1.2.1.a. Statischer Druck, dynamischer Druck, Gesamtdruck

Gemäß Gl. (5'') kann man folgende Druckbegriffe einführen:

1) p_1 und p_2 heißen **statische Drücke** p_{stat} und können mit einer **statischen Sonde = Piezorohr** erfasst werden.

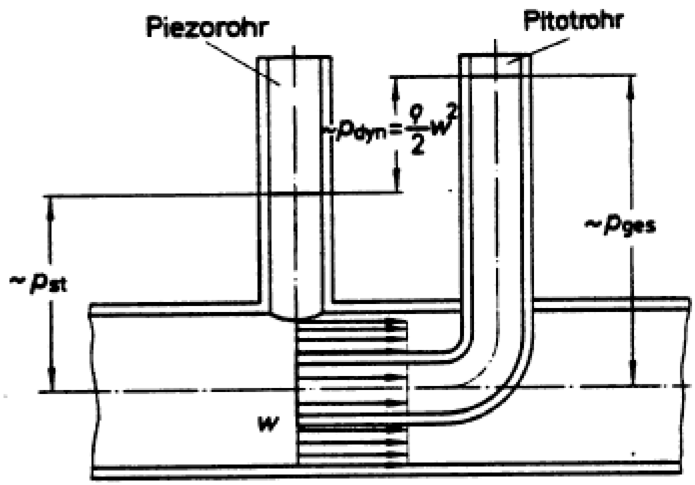
2) $\frac{\rho_1 (c_1)^2}{2}$ und $\frac{\rho_2 (c_2)^2}{2}$ heißen **dynamische Drücke** p_{dyn}

und können mit einer **Prandtl-Sonde** (bzw. Prandtl-Rohr) erfasst werden. Die Prandtl-Sonde besteht aus einer statischen und einer Pitot-Sonde (bzw. Pitot-Rohr, das den Gesamtdruck misst), die zusammen ausgeführt sind. Der dynamische Druck wird als Druckdifferenz zwischen diesen beiden Sonden gemessen. Mit Hilfe der Prandtl-Sonde kann somit die Strömungsgeschwindigkeit bestimmt werden $c = \sqrt{\frac{2 \cdot p_{dyn}}{\rho}}$.

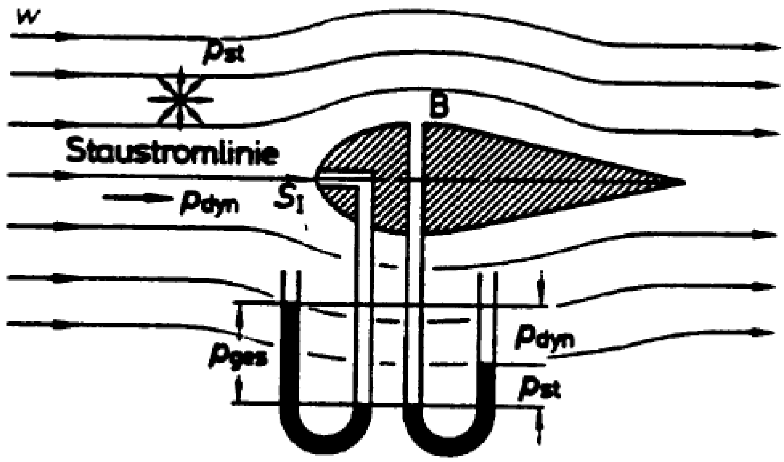
3) $\left[\frac{\rho_1 (c_1)^2}{2} + p_1\right]$ und $\left[\frac{\rho_1 (c_2)^2}{2} + p_2\right]$ heißen **Gesamtdrücke** p_{ges}

oder **Ruhedrücke** und können mit einer **Pitot-Sonde** erfasst werden. Der Gesamtdruck entsteht durch Aufstau der Strömung im Pitot-Rohr (auch Hakenrohr genannt).

2.3.1.2.1.b. Piezo-Rohr, Pitot-Rohr, Prandtl-Rohr (prinzipieller Aufbau)



Piezo-Rohr und Pitot-Rohr



Prandtl-Rohr

2.3.1.2.2. Verschiedene Begriffe im Falle der isentropen Strömung eines Idealgases

2.3.1.2.2.a. Ruhe-, Kessel- oder Stau-Zustand

In die Gl. (7'') vernachlässigt man die Änderung der potentiellen Energie im Gravitationsfeld (übliche Vereinfachung im Falle einer Gasströmung). Somit ergibt sich

$$\frac{(c_1)^2}{2}+\frac{(a_1)^2}{\kappa-1}=\frac{(c_2)^2}{2}+\frac{(a_2)^2}{\kappa-1}$$

Wenn diese Gleichung zwischen einem großen Behälter oder Umgebung (Zustand 0), der als **Stau-**, **Kessel-** oder **Ruhe-Zustand** mit Strömungsgeschwindigkeit $c_0 = 0$ genannt wird, und einer Öffnung oder einem Rohrquerschnitt (Zustand 1) geschrieben wird, ergibt sich

$$\frac{(a_0)^2}{\kappa-1}=\frac{c^2}{2}+\frac{a^2}{\kappa-1}$$

Nach weiterer Bearbeitung

$$\left(\frac{a_0}{a}\right)^2=\frac{\kappa-1}{2}\cdot\left(\frac{c}{a}\right)^2+1$$

ergeben sich die Berechnungsgleichungen für den Stauzustand (Index 0)

$$\frac{T_0}{T}=1+\frac{\kappa-1}{2}\cdot Ma^2 \qquad \frac{p_0}{p}=\left(1+\frac{\kappa-1}{2}\cdot Ma^2\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \qquad \frac{\rho_0}{\rho}=\left(1+\frac{\kappa-1}{2}\cdot Ma^2\right)^{\frac{1}{\kappa-1}}$$

Der Stauzustand beschreibt somit den Zustand einer Strömung, in der sich ihre kinetische Energie **isentrop** in potentielle Energie umwandelt. Dadurch ist es möglich zwei Strömungen zu vergleichen, die mit unterschiedlichen Drücken und Strömungsgeschwindigkeiten erfolgen (zum Beispiel wenn diese gegeneinander in einem T-Stück eintreten).

Zwischen Schallgeschwindigkeit im Ruhezustand a_0 und Schallgeschwindigkeit im strömenden Fluid a, mit $c = a$, kann folgende Beziehung gewonnen werden

$$\frac{(a_0)^2}{\kappa-1} = \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{\kappa-1} = \frac{\kappa+1}{2\cdot(\kappa-1)}\cdot a^2$$

$$a = \sqrt{\frac{2}{\kappa+1}}\cdot a_0 \qquad a_0 = \sqrt{\frac{\kappa+1}{2}}\cdot a$$

Zum Beispiel für $\kappa := 1.4$ ergibt sich $\sqrt{\frac{2}{\kappa+1}} = 0.913$ oder $\sqrt{\frac{\kappa+1}{2}} = 1.095$.

2.3.1.2.2.b. Kritischer Zustand

Der **kritische Zustand** ist der Zustand, in dem die Strömung mit Schallgeschwindigkeit erfolgt. Dieser Zustand wird durch folgende Gleichungen beschrieben

$$\left(\frac{a}{a_0}\right)^2 = \frac{2}{\kappa+1}$$

$$\frac{T_k}{T_0} = \frac{2}{\kappa+1} \qquad \frac{p_k}{p_0} = \left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \qquad \frac{\rho_k}{\rho_0} = \left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}}$$

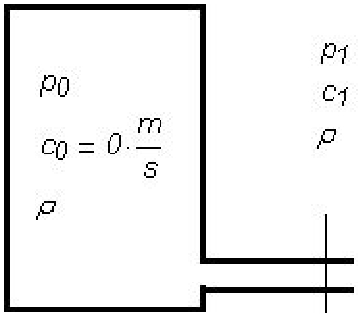
2.3.1.3. Ausströmen aus einem Behälter

2.3.1.3.1. Bestimmung der Strömungsgeschwindigkeit

2.3.1.3.1.a. Im Falle eines inkompressiblen Fluids

Aus der Bernoulli-Gl. für inkompressible Fluide in einer stationären Strömung (5'), (5'') oder (5'''), geschrieben zwischen Behälter (Index 0) und einem Querschnitt (Index 1) entlang des Anschlussrohrs, ergibt sich für die Austrittsgeschwindigkeit, wenn der Höhenunterschied vernachlässigt wird (übliche Annahme z.B. bei einer Gasströmung)

$$c_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot (p_0 - p_1)}{\rho}}$$



Nun stellt sich die Frage, wie groß kann die maximale Strömungsgeschwindigkeit werden?
Aus der Gleichung es resultiert für eine unendliche Druckdifferenz ebenfalls eine unendliche Strömungsgeschwindigkeit. Das Ergebnis ist natürlich nicht realistisch und nur als Folge der Idealisierung *inkompressibles Fluid* zu interpretieren.

2.3.1.3.1.b. Im Falle der isentropen stationären Strömung eines Idealgases. Gleichungen von Saint-Venant und Wantzell

Vernachlässigt man die Strömungsverluste und die Änderung der potentiellen Energie im Gravitationsfeld (kein Höhenunterschied wird berücksichtigt), ergibt sich für die Berechnung der **Strömungsgeschwindigkeit** beim Ausströmen aus dem Behälter

$$c_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot \kappa}{\kappa - 1} \cdot \left(\frac{p_0}{\rho_0} - \frac{p_1}{\rho_1} \right)} = \sqrt{\frac{2}{\kappa - 1} \cdot \left[(a_0)^2 - (a_1)^2 \right]}$$

oder

$$c_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot (a_0)^2}{\kappa - 1} \cdot \left[1 - \left(\frac{a_1}{a_0} \right)^2 \right]} = \sqrt{\frac{2 \cdot (a_0)^2}{\kappa - 1} \cdot \left(1 - \frac{p_1}{p_0} \cdot \frac{\rho_0}{\rho_1} \right)}$$

Die Dichte im Zustand 1 kann mit Hilfe der Isentropengleichung eliminiert werden. Nach dem Einsetzen von

$$\frac{\rho_0}{\rho_1} = \left(\frac{p_0}{p_1} \right)^{\frac{1}{\kappa}}$$

in der obigen Gleichung, ergibt sich

$$c_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot (a_0)^2}{\kappa - 1} \cdot \left[1 - \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}} \right]} = \sqrt{\frac{2 \cdot \kappa}{\kappa - 1} \cdot \frac{p_0}{\rho_0} \cdot \left[1 - \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}} \right]}$$

Nach dem wiederholten Einsetzen der Isentropengleichung resultiert

$$c_1 = \sqrt{\frac{2\cdot\kappa}{\kappa-1}\cdot R\cdot T_0\cdot\left(1-\frac{T_1}{T_0}\right)} = \sqrt{\frac{2\cdot\kappa}{\kappa-1}\cdot R\cdot\left(T_0-T_1\right)}$$

Mit Hilfe der Beziehung zwischen der isobaren spezifischen Wärmekapazität und dem Isentropenexponent und der kalorischen Zustandsgleichung resultiert noch

$$c_1 = \sqrt{2\cdot c°_p\cdot\left(T_0-T_1\right)} = \sqrt{2\cdot\left(h_0-h_1\right)}$$

Diese letzte Gleichung wird unter im § 2.3 nochmals aus dem Energieerhaltungssatz (Stationärprozess, offenes System mit 1. Eintritt und 1. Austritt) gewonnen.

Nun stellt sich die Frage, wie groß kann die maximale Strömungsgeschwindigkeit werden?

Aus der Gleichung

$$c_1 = \sqrt{\frac{2\cdot\kappa}{\kappa-1}\cdot\frac{p_0}{\rho_0}\cdot\left[1-\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right]}$$ somit resultiert für $\frac{p_1}{p_0} = 0$

$$c_{max} = \sqrt{\frac{2\cdot\kappa}{\kappa-1}\cdot\frac{p_0}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{2}{\kappa-1}\cdot\left(a_0\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{\kappa-1}}\cdot a_0$$

d.h. die maximale Geschwindigkeit ist nicht unendlich, wie im Falle der Strömung eines inkompressiblen Fluids.

$\kappa := 1.4$ $\qquad T_0 := 300\cdot K$ $\qquad R := 287\cdot\frac{J}{kg\cdot K}$

$a_0 := \sqrt{\kappa\cdot R\cdot T_0}$ $\qquad a_0 = 347.2\,\frac{m}{s}$

$c_{max} := \sqrt{\frac{2}{\kappa-1}}\cdot a_0$ $\qquad c_{max} = 776.3\,\frac{m}{s}$

Im Falle einer einfachen Düse kann aber die Schallgeschwindigkeit a nicht überschritten werden (~~für den Beweis s. § 2.2.1.4~~). D.h. mit den Zahlenwerten aus dem Beispiel

$a_1 := \sqrt{\frac{2}{\kappa+1}}\cdot a_0$ $\qquad c_{max} := a_1$ $\qquad c_{max} = 316.9\,\frac{m}{s}$

Diese Geschwindigkeitsbegrenzung entsteht, weil der Druck in dieser Düse nicht kleiner als der kritische Druck werden kann. Als Beweis kann in die Geschwindigkeitsformel den Druck p_1 anstelle des kritischen Druckes p_k eingesetzt werden. Somit ergibt sich

$$c_{max} = \sqrt{\frac{2\cdot\kappa}{\kappa-1}\cdot\frac{p_0}{\rho_0}\cdot\left[1-\left(\frac{p_k}{p_0}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right]} = \sqrt{\frac{2\cdot\kappa}{\kappa-1}\cdot\frac{p_0}{\rho_0}\cdot\left[1-\left[\left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}\right]^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right]}$$

$$c_{max} = \sqrt{\frac{2\cdot\kappa}{\kappa-1}\cdot\frac{p_0}{\rho_0}\cdot\left(1-\frac{2}{\kappa+1}\right)} = \sqrt{\frac{2\cdot\kappa}{\kappa-1}\cdot\frac{p_0}{\rho_0}\cdot\frac{\kappa-1}{\kappa+1}} = \sqrt{\frac{2\cdot\kappa}{\kappa+1}\cdot\frac{p_0}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{2}{\kappa+1}}\cdot a_0 = a_1$$

2.3.1.3.2. Bestimmung des stationär austretenden Massenstroms

2.3.1.3.2.a. Bestimmung des Massenstroms Im Falle eines inkompressiblen Fluids

Der Massenstrom durch einen Rohrquerschnitt der Fläche A ist

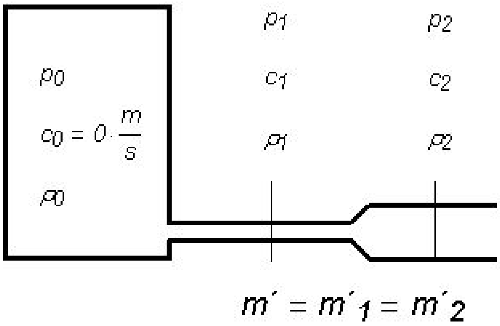
$$m' = \rho \cdot A \cdot c \qquad \text{wobei} \qquad c = \sqrt{\frac{2 \cdot (p - p_0)}{\rho}}$$

und nimmt überall im Rohr den gleichen Wert an, da der Strömungsprozess stationär abläuft (als Folge der Kontinuitätsgleichung). Aus diesem Grund wird an den Index 1 weiterhin verzichtet.

2.3.1.3.2.b. Bestimmung des Massenstroms im Falle der isentropen stationären Strömung eines Idealgases durch eine einfache Düse

Auch in diesem Fall als Folge der Kontinuitätsgleichung bleibt der Massenstrom in allen Rohrquerschnitten konstant, auch dann wenn der Rohrquerschnitt einen Verlauf aufweist und somit Druck, Strömungsgeschwindigkeit und Dichte entlang des Rohres ebenfalls eigene Verläufe haben müssen.

Der Zweck jeder Düse ist die Erhöhung der Strömungsgeschwindigkeit!



Der isentrope Massenstrom

$$m'_s = \rho \cdot A \cdot c$$

ist der maximale Massenstrom, der durch eine Querschnittsfläche A erreicht werden kann. Der Wert kann damit nur im Idealfall (reversibler Prozess - d.h. ohne Strömungsverluste - in einem adiabaten Systems) erreicht werden. Der reale Massenstrom kann damit als

$$m' = \mu \cdot m'_s$$

definiert werden, wobei $\mu \le 1$ der isentrope Durchflusskoeffizient ist. Mit den Formeln der isentropen Strömung

$$c = \sqrt{\frac{2 \cdot \kappa}{\kappa - 1} \cdot \frac{p_0}{\rho_0} \cdot \left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right]} \qquad \text{und} \qquad \rho = \rho_0 \cdot \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{\kappa}}$$

resultiert für den Massenstrom

$$m'_s = \rho_0 \cdot \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{\kappa}} \cdot A \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \kappa}{\kappa - 1} \cdot \frac{p_0}{\rho_0} \cdot \left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right]} = A \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \kappa}{\kappa - 1} \cdot p_0 \cdot \rho_0 \cdot \left[\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{2}{\kappa}} - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\kappa+1}{\kappa}}\right]}$$

Man definiert die Ausflussfunktion

$$\Psi = \sqrt{\frac{\kappa}{\kappa-1}\cdot\left[\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{2}{\kappa}} - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\kappa+1}{\kappa}}\right]}$$

Um den Verlauf der Ausflussfunktion graphisch darzustellen, wird der Quotient der Drücke durch die Variable p_p_0 ersetzt. Somit ergibt sich für diese Funktion der Ausdruck

$$\Psi(p\_p_0,\kappa) := \sqrt{\frac{\kappa}{\kappa-1}\cdot\left[(p\_p_0)^{\frac{2}{\kappa}} - (p\_p_0)^{\frac{\kappa+1}{\kappa}}\right]}$$

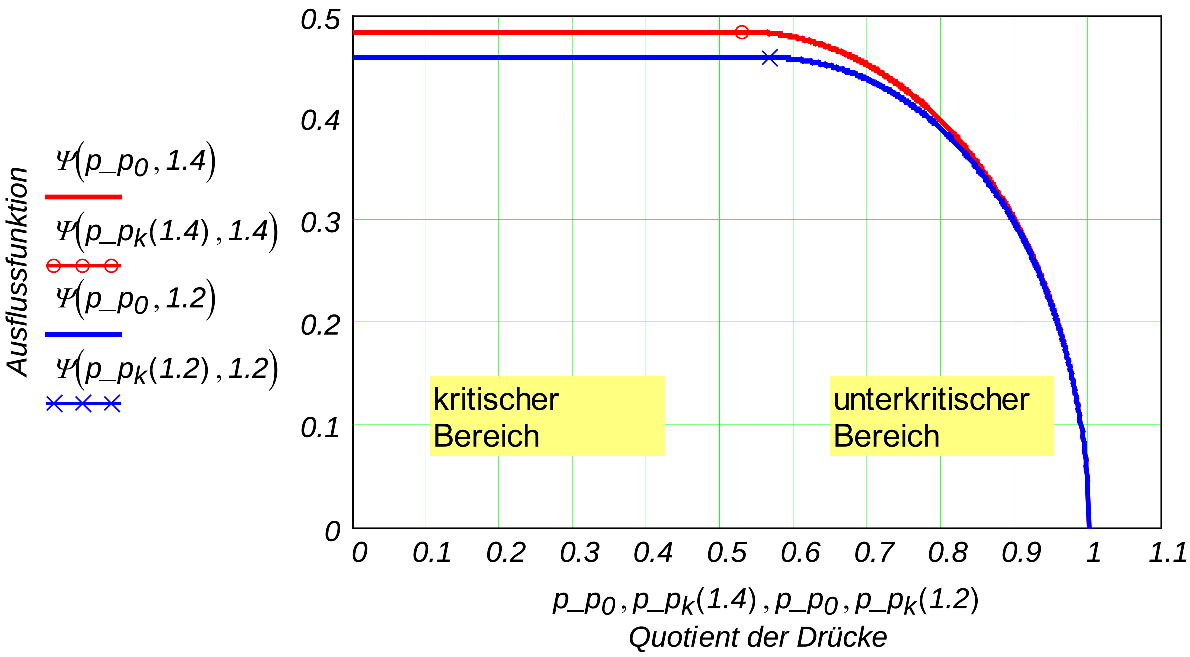
Im Falle einer kritischen Strömung wird der Quotient der Drücke $p\_p_k = \frac{p_k}{p_0}$ die auch als das kritische Druckverhältnis bezeichnet, wird zu

$$p\_p_k(\kappa) := \left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}$$

Beispielweise wird unten die Ausflussfunktion für die Luft bei zwei unterschiedlichen Temperaturen graphisch dargestellt, wobei die Isentropenexponenten 1,4 und 1,2 betragen. Die maximalen Werte und deren Lage betragen

$p\_p_k(1.4) = 0.528$ $\qquad$ $p\_p_k(1.2) = 0.564$

$\Psi(p\_p_k(1.4), 1.4) = 0.484$ $\qquad$ $\Psi(p\_p_k(1.2), 1.2) = 0.459$



Man beachte, dass das Maximum der Funktion nicht bei einem Quotient der Drücke von 0,5 vorliegt! Links vom Maximum ist der Bereich der kritischen Strömung mit $c = a$ (Strömungsgeschwindigkeit = Schallgeschwindigkeit innerhalb der Strömung), und rechts der Bereich der unterkritischen Strömung mit $c < a$.

Nach dem Einsetzen des kritischen Verhältnisses in die Formel der Ausflussfunktion ergibt sich

$$\Psi_{max} = \sqrt{\frac{\kappa}{\kappa-1}\cdot\left[\left[\left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}\right]^{\frac{2}{\kappa}} - \left[\left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}\right]^{\frac{\kappa+1}{\kappa}}\right]} = \left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}}\cdot\sqrt{\frac{\kappa}{\kappa+1}}$$

Somit ergibt sich für den isentropen Massenstrom

$$m'_s = A\cdot\Psi\cdot\sqrt{2\cdot p_0\cdot\rho_0} \quad (1) \qquad \text{oder auch} \qquad m'_s = A\cdot\rho\cdot c \quad (2)$$

Der maximale Wert des isentropen Massenstroms beträgt somit

$$\left(m'_s\right)_{max} = A\cdot\Psi_{max}\cdot\sqrt{2\cdot p_0\cdot\rho_0} \qquad \text{oder}$$

$$\left(m'_s\right)_{max} = A\cdot\left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}}\cdot\sqrt{\frac{\kappa}{\kappa+1}}\cdot\sqrt{2\cdot p_0\cdot\rho_0}$$

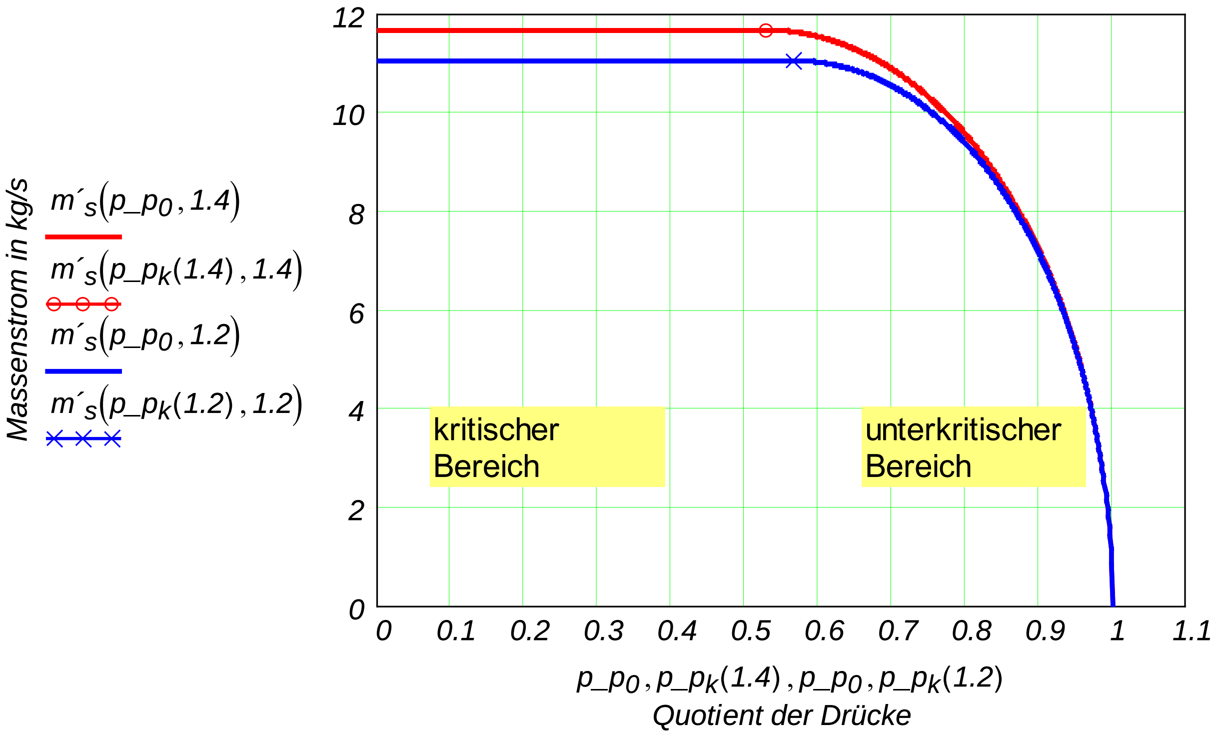
Für die folgenden Zahlenwerte

$$A := 0.01\cdot m^2 \qquad p_0 := 5\cdot 10^5\cdot Pa \qquad T_0 := 300\cdot K \qquad \rho_0 := \frac{p_0}{R\cdot T_0} \qquad \rho_0 = \blacksquare\,\frac{kg}{m^3}$$

wird der Verlauf des isentropen Massenstroms der unten graphisch dargestellt wird, berechnet:

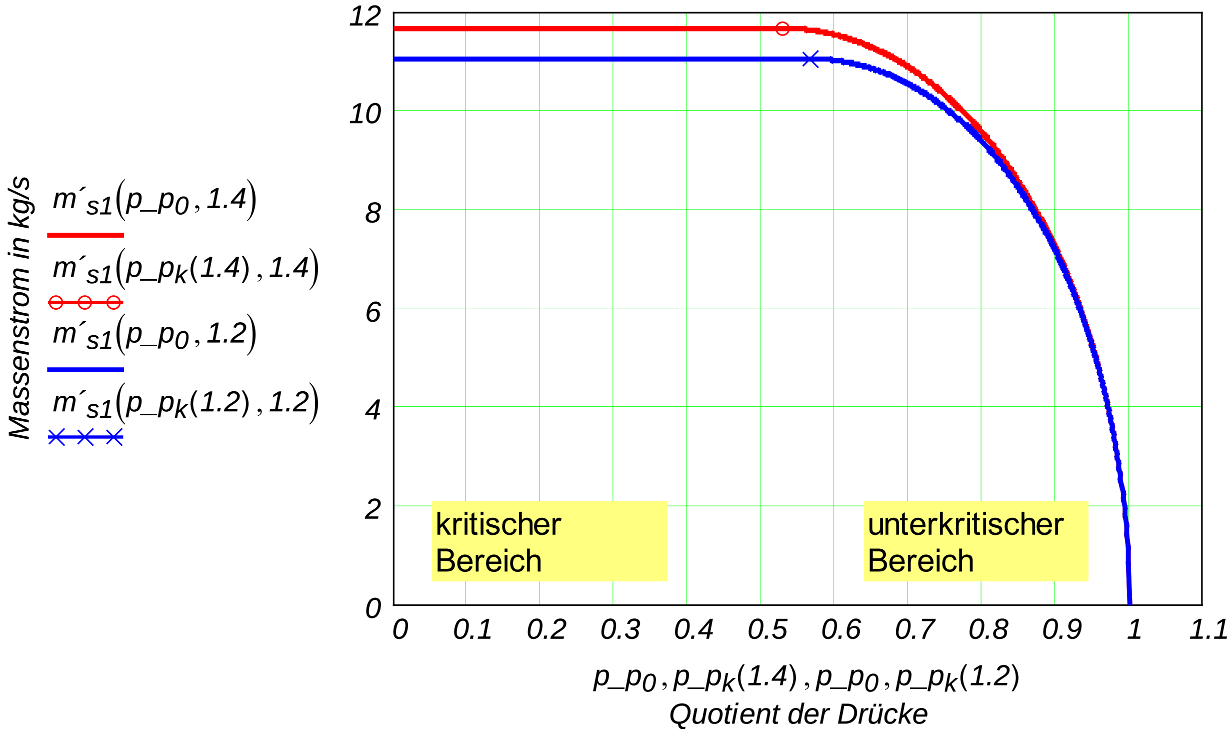
- Mit der Formel (1), d.h.

$$m'_s(p\_p_0,\kappa) := wenn\left(p\_p_0 > p\_p_k(\kappa), A\cdot\Psi(p\_p_0,\kappa)\cdot\sqrt{2\cdot p_0\cdot\rho_0}, A\cdot\Psi_{max}(\kappa)\cdot\sqrt{2\cdot p_0\cdot\rho_0}\right)$$

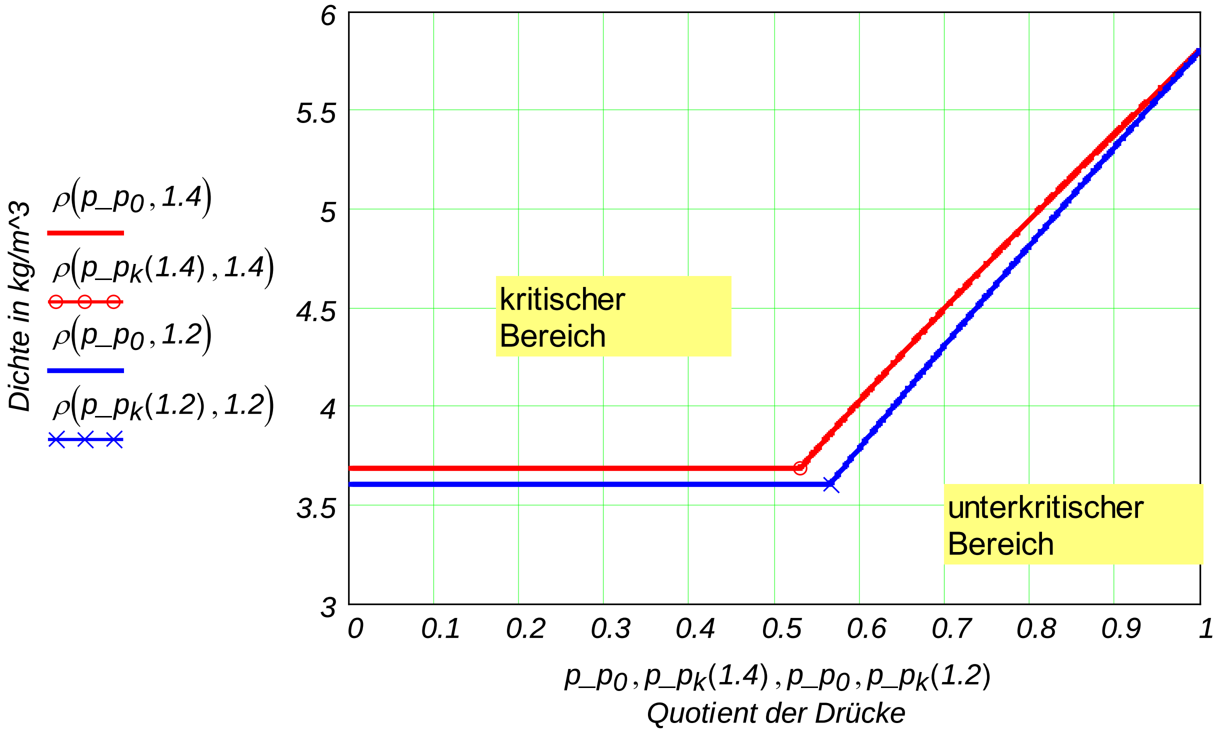


- Mit der Formel (2), d.h.

$$m'_{s1}(p\_p_0,\kappa) := A\cdot c(p\_p_0,\kappa)\cdot\rho(p\_p_0,\kappa)$$

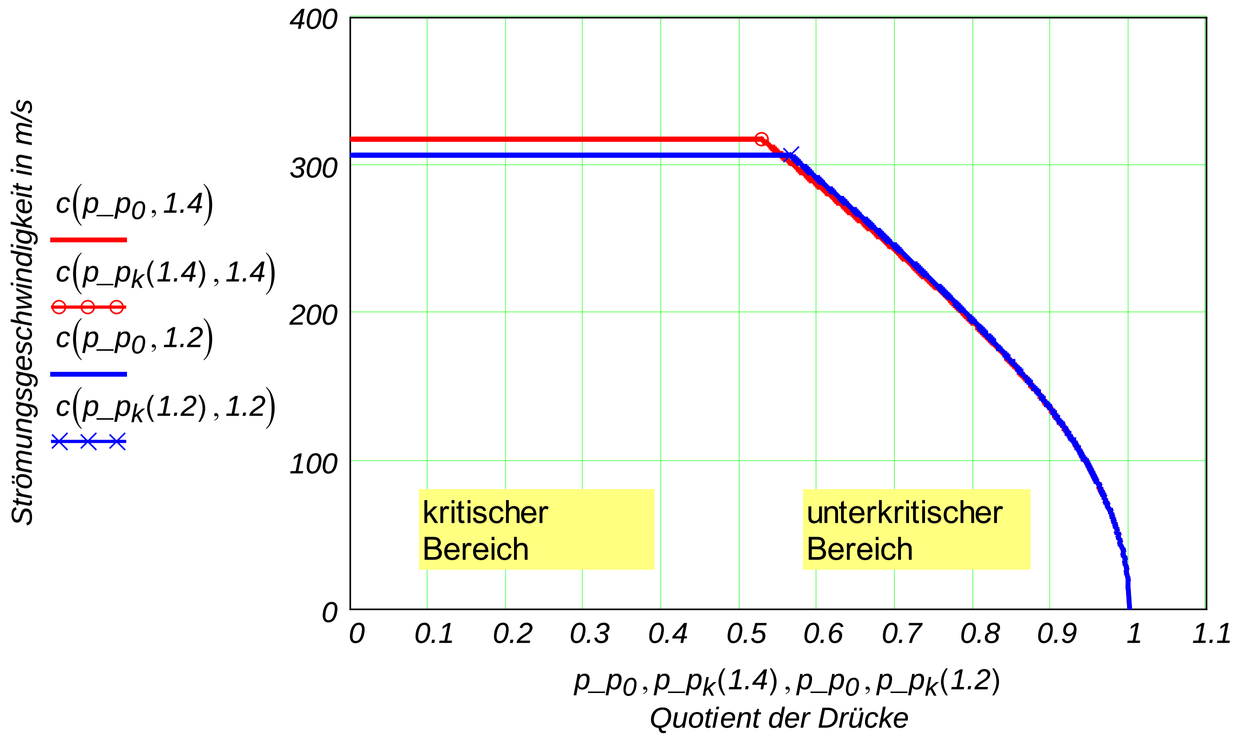


Somit wird deutlich, dass der maximale Massenstrom schon beim Einsetzen des kritischen Druckverhältnisses erreicht wird. **Eine Druckminderung unter dem kritischen Druck im Austritt einer einfachen Düse beeinflusst den Massenstrom nicht mehr.** Um das verstehen zu können, soll man auch beachten, was mit der Dichte



wobei $$\rho(p\_p_0, \kappa) := wenn\left(p\_p_0 > p\_p_K(\kappa), \rho_0 \cdot p\_p_0^{\frac{1}{\kappa}}, \rho_0 \cdot p\_p_K(\kappa)^{\frac{1}{\kappa}}\right)$$

und was mit der Strömungsgeschwindigkeit passiert,



wobei

$$c(p\_p_0,\kappa) := \text{wenn}\left[p\_p_0 > p\_p_K(\kappa),\ \sqrt{\frac{2\cdot\kappa}{\kappa-1}\cdot\frac{p_0}{\rho_0}\cdot\left(1-p\_p_0^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right)},\ \sqrt{\frac{2\cdot\kappa}{\kappa-1}\cdot\frac{p_0}{\rho_0}\cdot\left(1-p\_p_K(\kappa)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right)}\right]$$

Mann kann oben erkennen, dass die Strömungsgeschwindigkeit und die Dichte ebenfalls in diesem Querschnitt ihre kritischen Werte erreichen und somit bei kleineren Druckverhältnissen nicht weiter ansteigen bzw. abnehmen können, so dass ihr Produkt, d.h. $m'_S = \rho\cdot A\cdot c$ konstant bleibt.

Es stellt sich nun die Frage, welchen Verlauf wird der Massenstrom haben, wenn man (durch konstruktive Maßnahmen an der Düse) eine höhere Strömungsgeschwindigkeit als die Schallgeschwindigkeit erreichen will?

2.3.1.3.2.c. Bestimmung des Massenstroms im Falle der isentropen stationären Strömung eines Idealgases durch eine Laval-Düse (s. unten ein Bild davon)

Da eine Laval-Düse die Strömungsgeschwindigkeit nicht mehr zur Schallgeschwindigkeit begrenzt, sehen die Verläufe der Dichte und der Strömungsgeschwindigkeit nicht mehr gebrochen aus (s. unten), es sei denn, dass nicht eine Stosswelle innerhalb der Düse auftritt.

Wie oben für eine einfache Düse vorgestellt, ist auch der Zweck einer Laval-Düse die Strömungsgeschwindigkeit zu erhöhen!

Das Ziel dieses Abschnitts ist, einen mathematischen Zusammenhang zwischen den jeweiligen jeden Düsenquerschnitt A und dortiger Strömungsgeschwindigkeit c, d.h. eine Funktion $A = A(c)$, entlang der Düse zu gewinnen.

Die Kontinuitätsgleichung für die stationäre isentrope Strömung

$$(\rho\cdot A)_\tau + (\rho\cdot A\cdot c)_S = 0$$

im Falle einer stationären Strömung $(\rho\cdot A)_\tau = 0$ entwickelt sie sich zu

$$\rho \cdot A \cdot \frac{d}{ds} c + A \cdot c \cdot \frac{d}{ds} \rho + \rho \cdot c \cdot \frac{d}{ds} A = 0$$

wobei s hier die Raumkoordinate entlang der Symmetrieachse der Düse bedeutet. Dividiert man alle Terme der Gleichung durch den Massenstrom, so resultiert

$$\frac{1}{c} \cdot \frac{d}{ds} c + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{d}{ds} \rho + \frac{1}{A} \cdot \frac{d}{ds} A = 0 \qquad (1) \qquad \text{oder} \qquad \frac{dc}{c} + \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dA}{A} = 0 \qquad (1')$$

Aus der Euler-Bewegungsgleichung im Falle der stationären isentropen Strömung eines Idealgases folgt

$$c_\tau + c \cdot c_S + \frac{1}{\rho} \cdot p_S = 0$$

wobei der Einfluss der Lage im Gravitationsfeld (wie üblich bei Gasströmung) vernachlässigt wird und $c_\tau = 0$ (stationäre Strömung). Es resultiert somit

$$c \cdot \frac{d}{ds} c = \frac{-1}{\rho} \cdot \frac{d}{ds} p$$

Die partielle Ableitung des Druckes ist hier unerwünscht und daher wird sie eliminiert. Dafür wird die Definitionsgleichung der Schallgeschwindigkeit verwendet $a^2 = \frac{d}{d\rho} p$, wobei die partielle Ableitung des Druckes bezogen zur Dichte im Falle einer **isentropen** Zustandsänderung durchgeführt wird. D.h. dass die Schallgeschwindigkeit sich **isentrop** fortpflanzt (d.h. ohne Verluste), was wegen der kleinen Amplituden der Schallwelle fast vollkommen zutrifft. Somit ergibt sich

$$dp = a^2 \cdot d\rho \qquad \text{oder} \qquad \frac{d}{ds} p = a^2 \cdot \frac{d}{ds} \rho$$

Die partielle Ableitung des Druckes wird nun zwischen den Gleichungen eliminiert

$$c \cdot \frac{d}{ds} c = \frac{-a^2}{\rho} \cdot \frac{d}{ds} \rho$$

und nach Einführung der Mach-Zahl $Ma = \frac{c}{a}$

ergibt sich

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{d}{ds} \rho = -Ma^2 \cdot \frac{1}{c} \cdot \frac{d}{ds} c \qquad (2) \qquad \text{oder} \qquad \frac{d\rho}{\rho} = -Ma^2 \cdot \frac{dc}{c} \qquad (2')$$

Nun kann man folgende Schlussfolgerungen ziehen:

- Für $Ma < 1$ ist die relative Dichteänderung kleiner als die relative Geschwindigkeitsänderung, also spielt die Kompressibilität des Gases eine untergeordnete Rolle.
- Für $Ma > 1$ ist es umgekehrt. Zum Beispiel bei $Ma = 10$ ist der Proportionalitätsfaktor *100*.

Eliminiert man die relative Änderung der Dichte zwischen (1) und (2) ergibt sich

$$-\left(\frac{1}{c}\cdot\frac{d}{ds}c+\frac{1}{A}\cdot\frac{d}{ds}A\right)=-Ma^2\cdot\frac{1}{c}\cdot\frac{d}{ds}c \qquad \left(1-Ma^2\right)\cdot\frac{1}{c}\cdot\frac{d}{ds}c+\frac{1}{A}\cdot\frac{d}{ds}A=0$$

$$\frac{1}{c}\cdot\frac{d}{ds}c=\frac{-1}{1-Ma^2}\cdot\frac{1}{A}\cdot\frac{d}{ds}A \qquad (3)$$

oder

$$\frac{dc}{c}=\frac{-1}{1-Ma^2}\cdot\frac{dA}{A} \qquad (3')$$

Wenn nun die Geometrie der Düse $A=A(s)$ bekannt ist, kann man mit Hilfe der Gl. (3) eine qualitative Diskussion der Strömung in einer Düse durchführen:
Wie oben erwähnt ist der Zweck einer Düse, die Strömung entlang der Düse zu erhöhen, d.h. $\frac{d}{ds}c>0$.

- Für $Ma<1$ verlangt dies $\frac{d}{ds}A<0$, d.h. Verengung des Querschnittes. Dies ist der Fall einer einfachen Düse.
- Für $Ma>1$ dagegen $\frac{d}{ds}A>0$, d.h. Erweiterung des Querschnittes.
- Für $Ma=1$ ist es notwendig $\frac{d}{ds}A=0$, d.h. konstanter Querschnitt.

Fasst man nun alle diese Teilergebnisse zusammen, so kommt man zwangsläufig zur Strömung in der Laval-Düse.
Man versucht nun nur eine Beziehung zwischen Mach-Zahl und Düsengeometrie $A(s)$ zu bekommen. Differenziert man die Definitionsgleichung der Mach-Zahl

$$Ma=\frac{c}{a}$$

ergibt sich

$$\frac{dMa}{Ma}=\frac{dc}{c}-\frac{da}{a} \qquad (4')$$

Differenziert man auch die Definitionsgleichung der Schallgeschwindigkeit

$$a^2=\frac{\kappa\cdot p}{\rho}$$

ergibt sich

$$2\frac{da}{a}=\frac{dp}{p}-\frac{d\rho}{\rho} \qquad (5')$$

aus der wie oben die relative Druckänderung eliminiert wird

$$2\frac{da}{a}=\frac{a^2\cdot d\rho}{p}-\frac{d\rho}{\rho} \qquad 2\frac{da}{a}=\frac{\kappa\cdot d\rho}{\rho}-\frac{d\rho}{\rho} \qquad 2\frac{da}{a}=(\kappa-1)\cdot\frac{d\rho}{\rho} \qquad (6')$$

Setzt man (2') in (6')

$$2\frac{da}{a}=-(\kappa-1)\cdot Ma^2\cdot\frac{dc}{c} \qquad (7')$$

und weiterhin (7') in (4') ein

$$\frac{dMa}{Ma}=\frac{dc}{c}+\frac{(\kappa-1)}{2}\cdot Ma^2\cdot\frac{dc}{c}$$

ergibt sich

$$\frac{dMa}{Ma}=\left[1+\frac{(\kappa-1)}{2}\cdot Ma^2\right]\cdot\frac{dc}{c} \qquad (8')$$

Setzt man schließlich (3') in (8') ein, so ergibt sich die gesuchte Abhängigkeit der Mach-Zahl von der Geometrie der Düse

$$\frac{1}{Ma}\cdot\frac{d}{ds}Ma = \left[1+\frac{(\kappa-1)}{2}\cdot Ma^2\right]\cdot\frac{-1}{1-Ma^2}\cdot\frac{1}{A}\cdot\frac{d}{ds}A \qquad (9) \qquad \text{oder}$$

$$\frac{dMa}{Ma} = \left[1+\frac{(\kappa-1)}{2}\cdot Ma^2\right]\cdot\frac{-1}{1-Ma^2}\cdot\frac{dA}{A} \qquad (9')$$

Die (9) bzw. (9') ist eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung, die durch die Trennung der Variablen gelöst werden kann. Mit den Bedingungen im **engsten Querschnitt**, wo der **kritischen Zustand** erreicht wird

$Ma_k = 1$ $\qquad A(Ma_k) = A_k = A_{min}$

es resultiert

$$\frac{A}{A_k} = \frac{1}{Ma}\cdot\left[1+\frac{\kappa-1}{\kappa+1}\cdot\left(Ma^2-1\right)\right]^{\frac{\kappa+1}{2\cdot(\kappa-1)}} \qquad (10)$$

Diskussion der Gleichungen

Aus (9) folgen:

- $\frac{d}{ds}A = 0$ und $Ma \neq 1$ verlangt $\frac{d}{ds}Ma = 0$
- $\frac{d}{ds}A \neq 0$ und $Ma = 1$ verlangt $\frac{d}{ds}Ma = \infty$

d.h. die singulären Punkte liegen dort, wo der Faktor $\frac{d}{ds}Ma = 0$ oder $\frac{d}{ds}Ma = \infty$ ist.

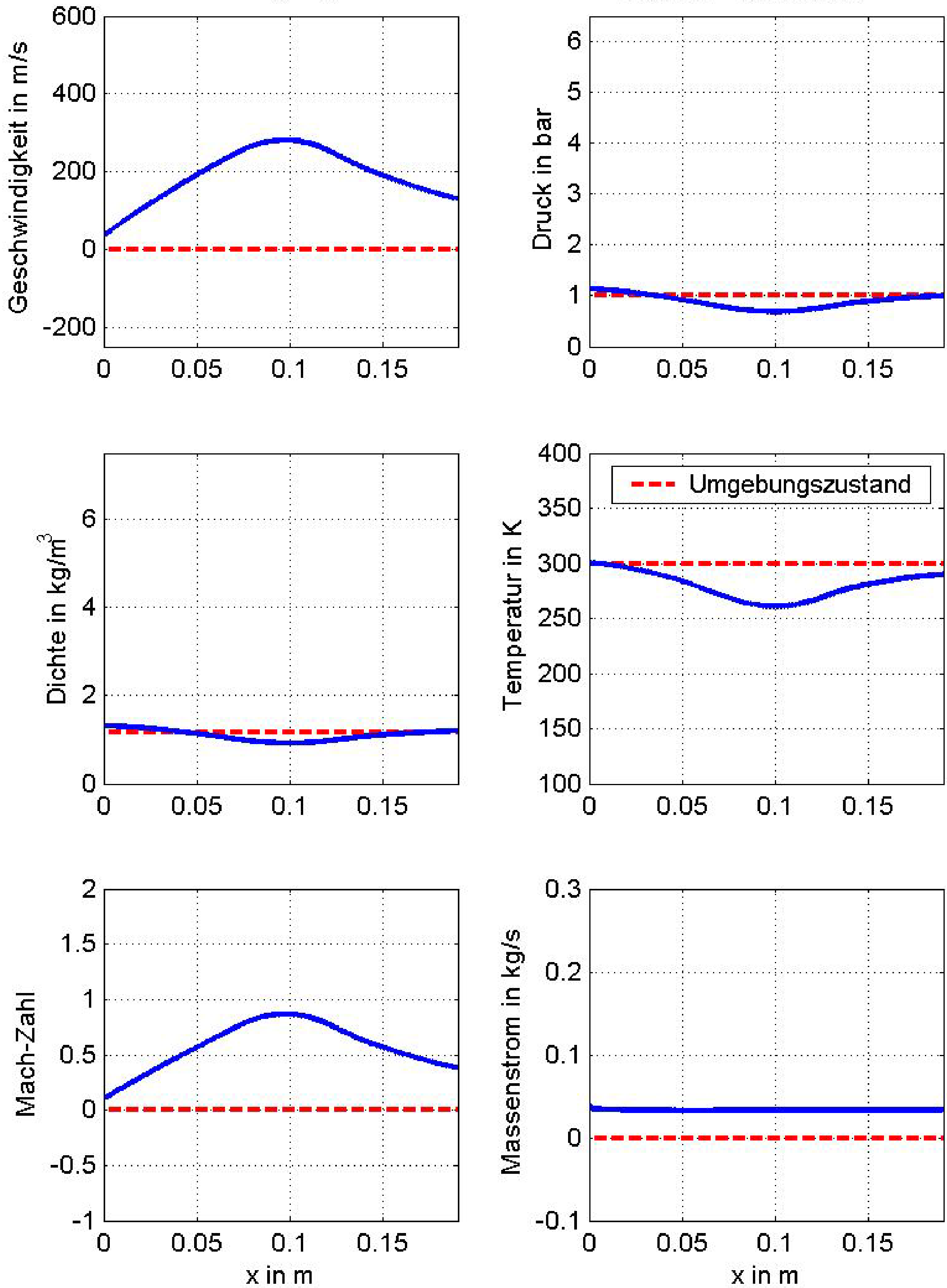
Aus (10) folgt:

- $A = A_{min}$ verlangt $Ma = 1$, d.h. kritischer Zustand mit $c_k = a$ im engsten Querschnitt.

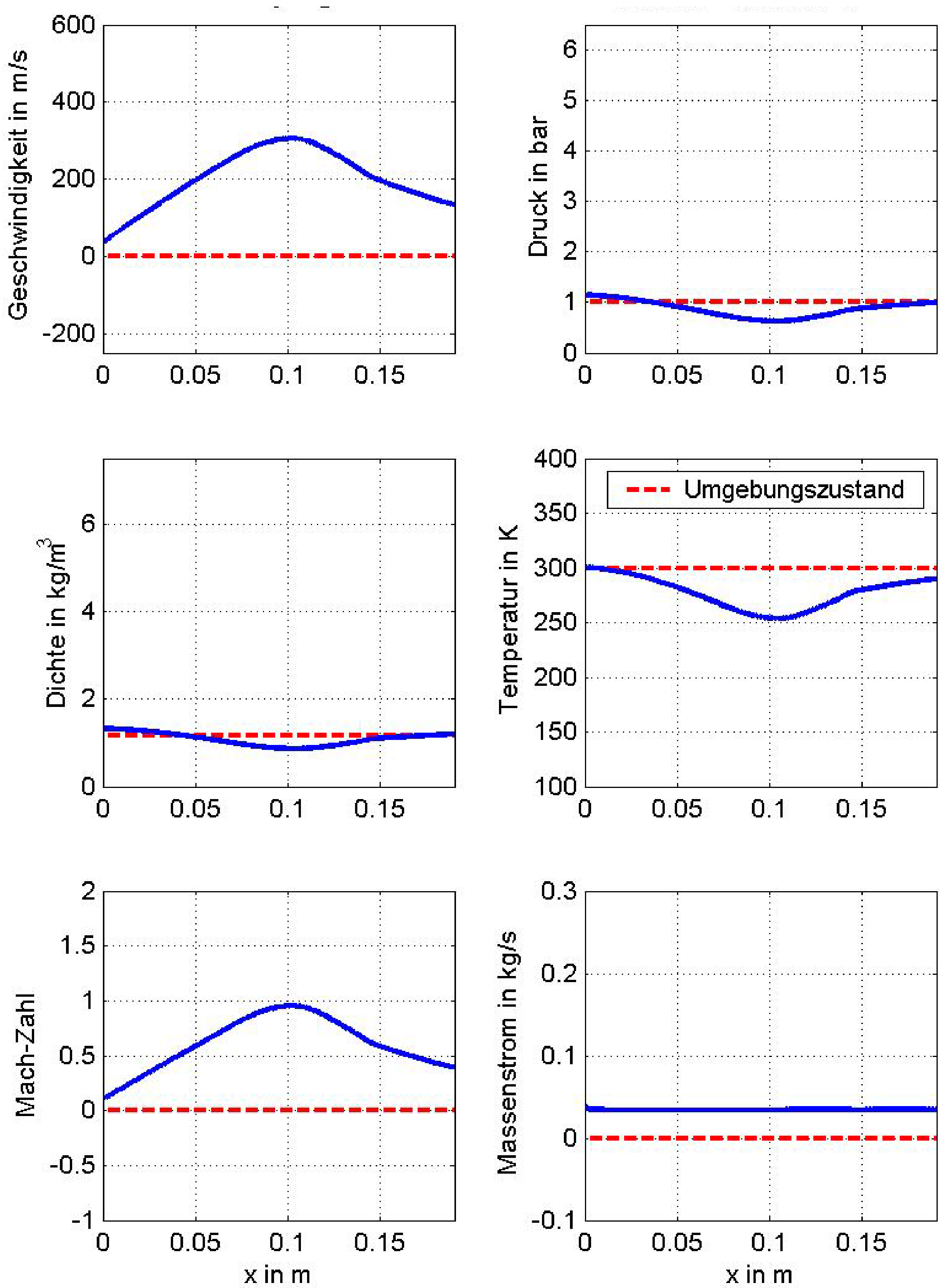
Durch Variation der Druckdifferenz zwischen Eintritt und Austritt der Düse lassen sich verschiedene Strömungen realisieren, die weiterhin im Falle der Entleerung eines Behälters durch eine Laval-Düse veranschaulicht werden.

In den folgenden sechs Bildern, wobei der Behälter links und Umgebung rechts von der Düse angeordnet sind, gibt die x-Achse die Position entlang der Laval-Düse an. Die Berechnungen wurden mit einem eigenen Simulationsprogramm (s. [15], [16], [17], [20] aus Liste der Veröffentlichungen), das unter MATLAB geschrieben wurde, durchgeführt. Das Profil der Laval-Düse wurde anhand des Beispiels vom Ende dieses Abschnittes erstellt. Im Gegenteil zu diesem Beispiel ist der Isentropenexponent in dem Simulationsprogramm temperaturabhängig (d.h. nicht konstant)!

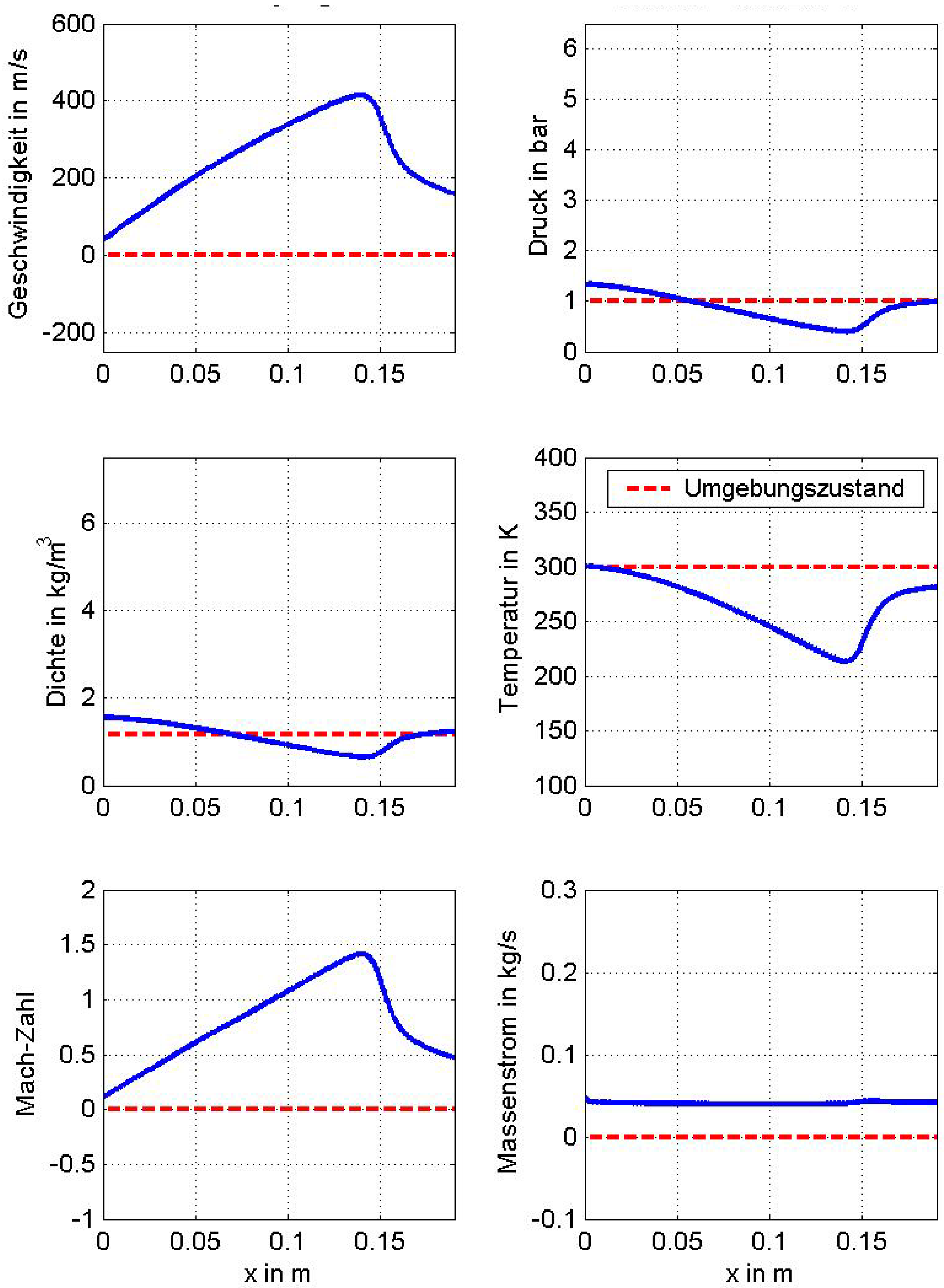
- Bei geringer Druckdifferenz (Fall A) zwischen Behälter (links von Düse) und Umgebung (rechts von Düse) erhält man eine Unterschalldüse. Im Bild ist der Behälterdruck 1.1 bar.



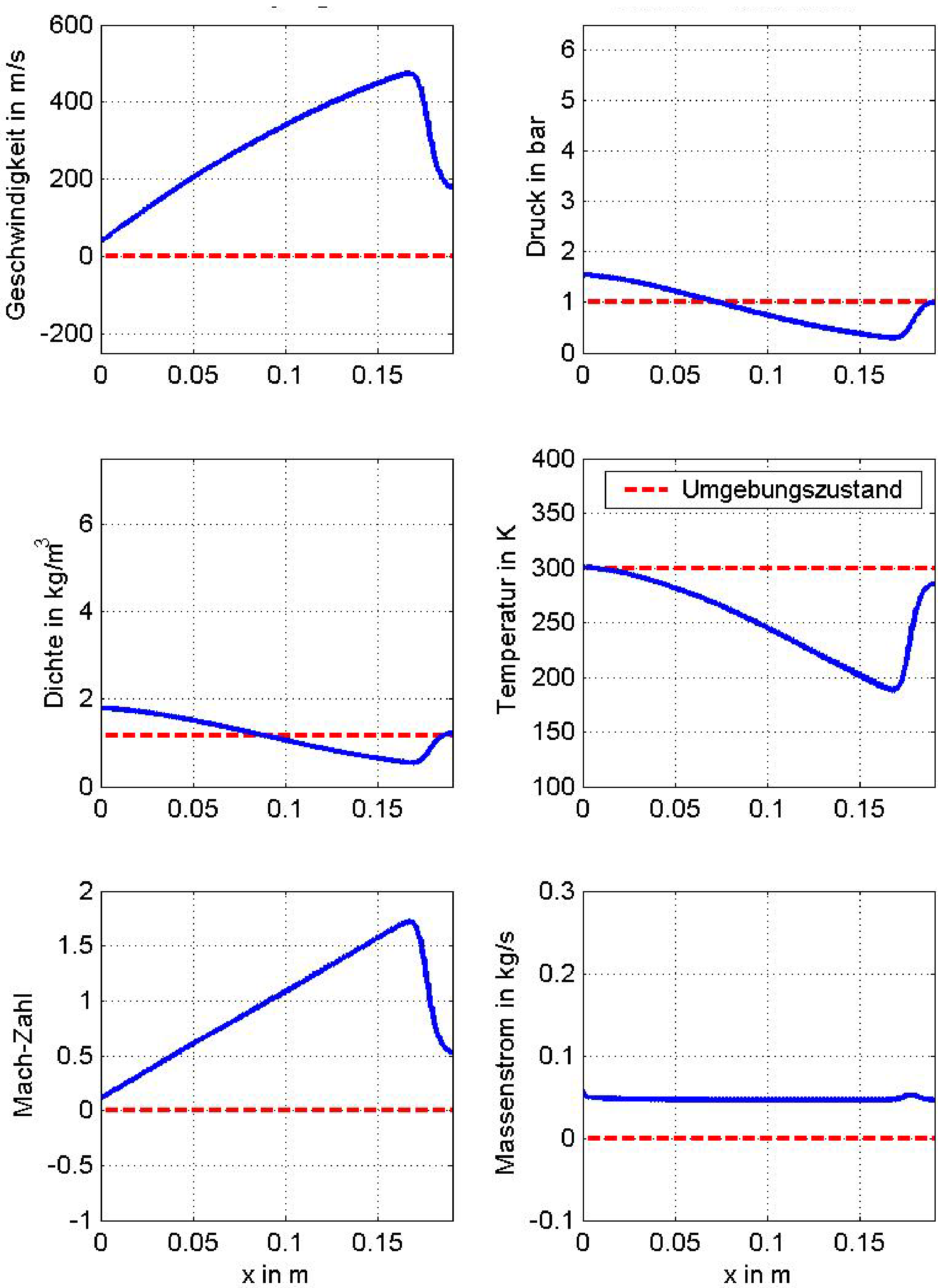
- (B) entspricht dem Fall, dass am engsten Querschnitt die Schallgeschwindigkeit zwar erreicht, aber nicht durchschritten wird. Im Bild ist der Behälterdruck 1.11 bar.



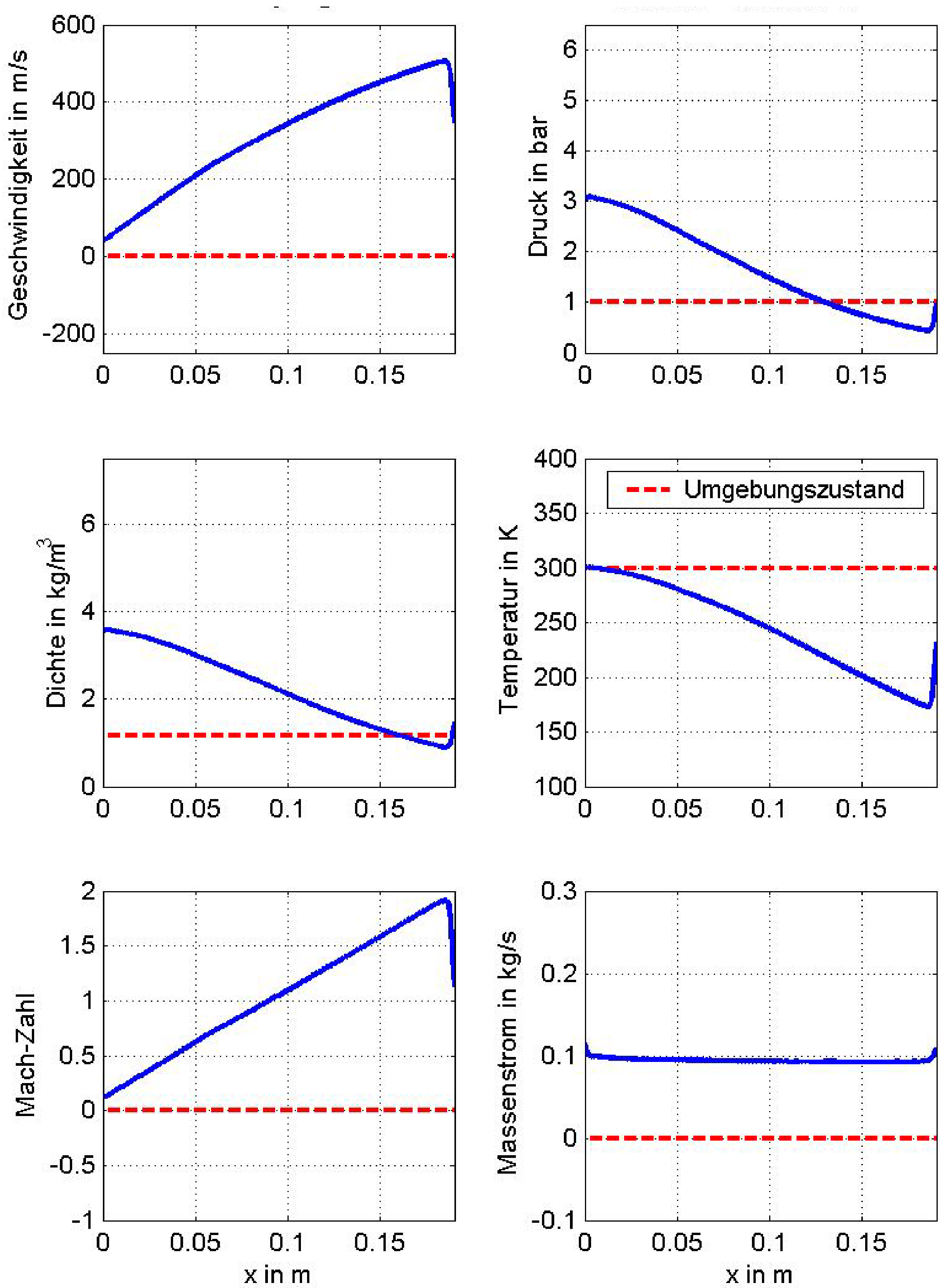
- Bei höherer Druckdifferenz (Fall C) ist eine stetige Strömung nicht mehr möglich. Es kommt zu einem so genannten senkrechten Verdichtungsstoß, in dem sich die Zustandsgrößen unstetig verändern, wobei die Strömungsgeschwindigkeit auf Unterschall sinkt und Druck, Temperatur und Dichte ansteigen. Im Bild ist der Behälterdruck 1,3 bar.



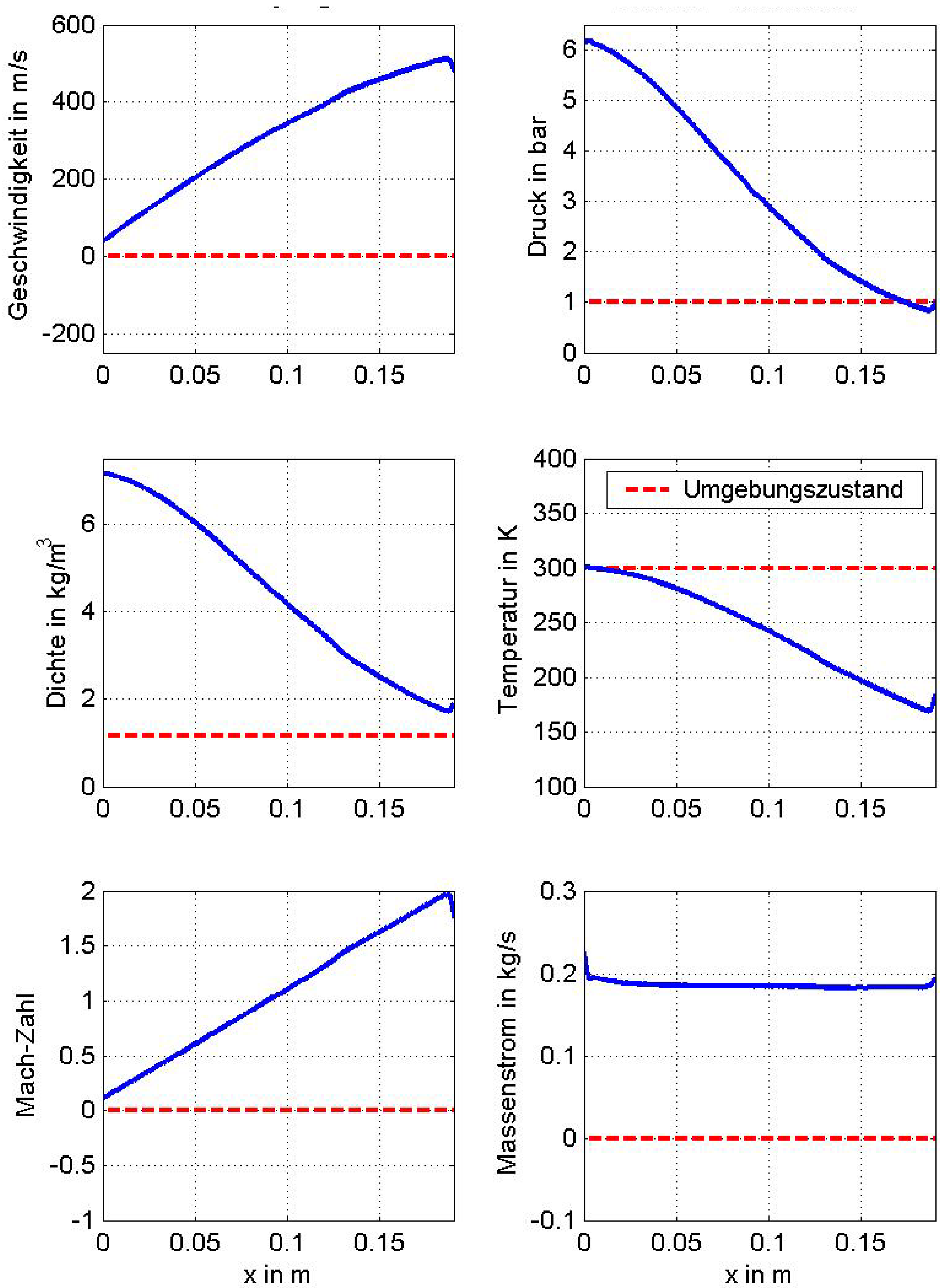
- Bei noch größerer Druckdifferenz (Fall D) wandert der Stoß zum Düsenende. Im Bild ist der Behälterdruck 1.5 bar.



- Zwischen (Fall D) und (Fall E) tritt ein schiefer Stoß im Düsen-Austritt auf. Im Bild ist der Behälterdruck 3 bar.



- (E) bezeichnet den Grenzfall der idealen Laval-Düse. Hier liegt ein paralleler Strahl im Austritt vor. Im Bild ist der Behälterdruck 6 bar.



- Bei einer weiteren Erhöhung der Druckdifferenz (Fall F) kommt es dort zu einer Expansion des Strahls im Austritt. Für die Verläufe innerhalb der Düse sieht man aber keinen Unterschied zum Fall (E).

Mehrere Animationen der instationären Strömungsvorgänge in dieser Laval-Düse angeschlossen an Behältern mit verschiedenen Volumina findet man unter Anlagen zur instationären Strömung für Behältervolumina: 1 cm^3, 10 cm^3, 100 cm^3, 1000 cm^3

Kommentare

Aus dem letzten Bild kann man zusätzlich erkennen, dass die Strömungsgeschwindigkeit, Dichte und Druck im Auslegungsfall (E) stetige Verläufe haben, d.h. sie werden in der Laval-Düse nicht mehr vom kritischen Zustand geknickt. Der kritische Zustand wird im engsten Querschnitt zwar erreicht aber durch die gezielte Geometrie der Laval-Düse kann er überschritten werden.
Aus den obigen Bildern kann man erkennen, dass der Massenstrom entlang der Düse (fast) konstant bleibt, solange die Strömung stationär abläuft.
Hinweis: Die kleinen Abweichungen des Massenstroms vom konstanten Wert sind die Folge des im Simulationsprogramm angewandten numerischen Integrationsverfahrens.

Für die Berechnung des Massenstroms im Auslegungsfall (E) gibt es nun zwei Wege:

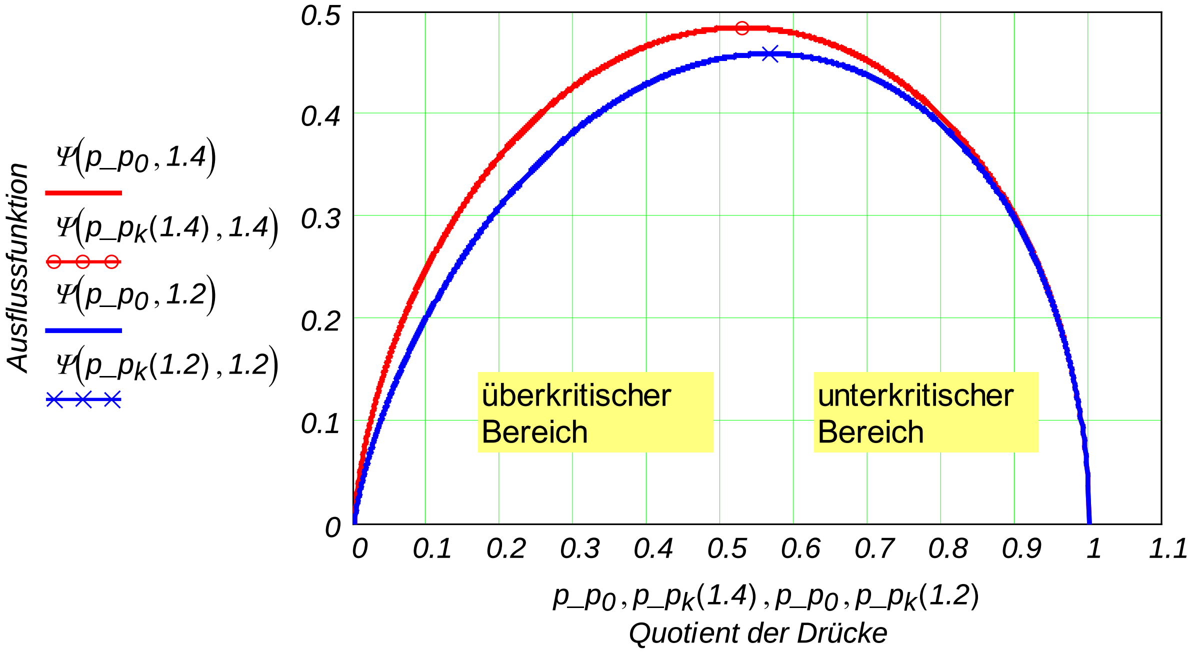
I. Weil der Massenstrom entlang der Düse konstant bleibt, kann er **in dem engsten Querschnitt** berechnet werden, d.h. man kann zur seiner Bestimmung praktisch nur mit der ersten Düsenhälfte arbeiten, die nur eine **einfache Düse** ist. Somit gelten weiterhin alle Überlegungen in Bezug auf die Ausflussfunktion, Dichte, Strömungsgeschwindigkeit und Massenstrom auch hier, wenn man beachtet, dass die Strömung in diesem engsten Querschnitt **kritisch** erfolgt.

II. Die Bestimmung des entlang der Düse konstanten Massenstroms kann aber nicht nur in den engsten Querschnitt sondern z.B. im **Düsenaustritt** erfolgen, wenn man dort auch den **örtlichen Düsen-Querschnitt** (d.h. im Austritt) einsetzt (s. unten ein Beispiel). In diesem Fall braucht man diesmal keine Bedingungsfunktionen in den Formeln von Strömungsgeschwindigkeit, Dichte und Ausflussfunktion mehr einzubauen, und das unabhängig davon ob dort die Strömung unterkritisch, kritisch oder überkritisch erfolgt. Unten dargestellt sind die Verläufe für Strömungsgeschwindigkeit, Dichte und Ausflussfunktion, wenn der Austrittsdruck variiert wird. Für die Bestimmung des Massenstroms ändert sich nichts, d.h. man erhält den gleichen Verlauf, wenn der Austrittsdruck variiert wird.

Man stellt sich nun natürlich die Frage, wozu eine Laval-Düse noch gut ist, wenn der gleiche Maximalwert für den Massenstrom schon mit einer einfachen Düse erreicht werden kann? **Die Antwort ist, dass bei der Anwendung der Laval-Düse das Ziel ist, nicht einen größeren Massenstrom sondern ein größeren Impuls (d.h. das Produkt aus Massenstrom und Strömungsgeschwindigkeit) des rausströmenden Fluids zu erreichen!**

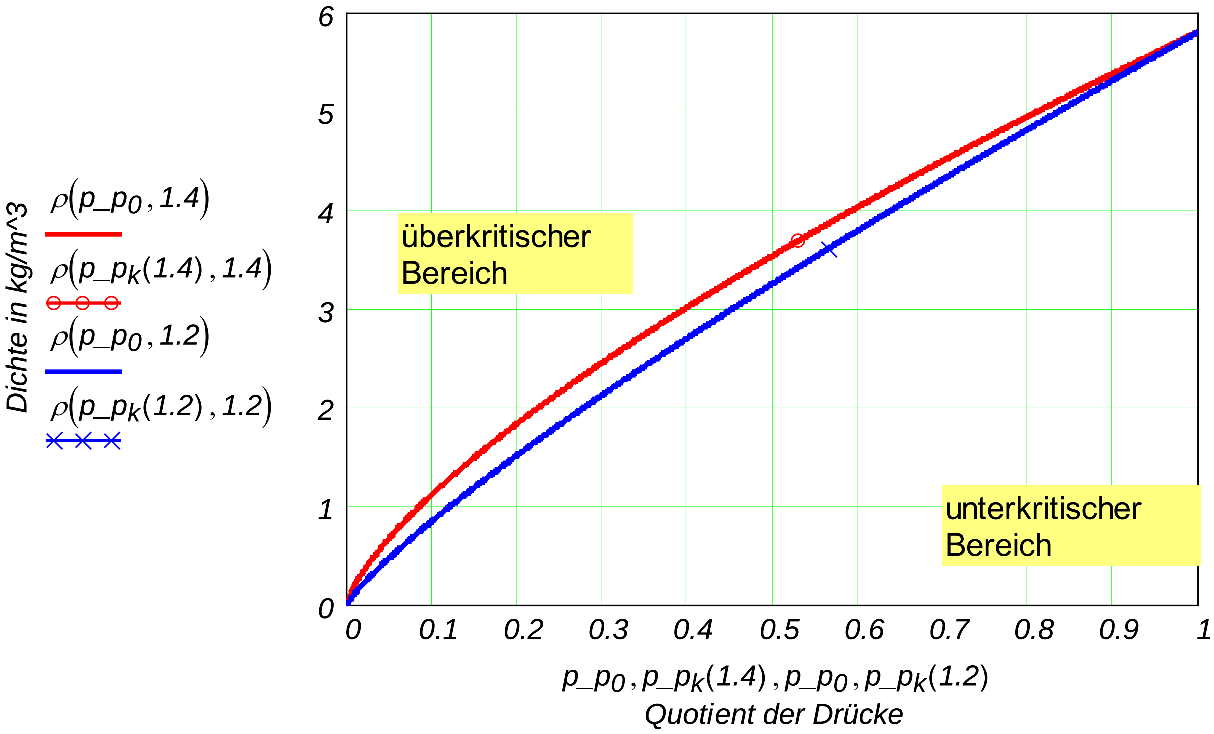
Für die Ausflussfunktion

$$\Psi(p\_p_0, \kappa) := \sqrt{\frac{\kappa}{\kappa - 1} \cdot \left[(p\_p_0)^{\frac{2}{\kappa}} - (p\_p_0)^{\frac{\kappa+1}{\kappa}} \right]}$$



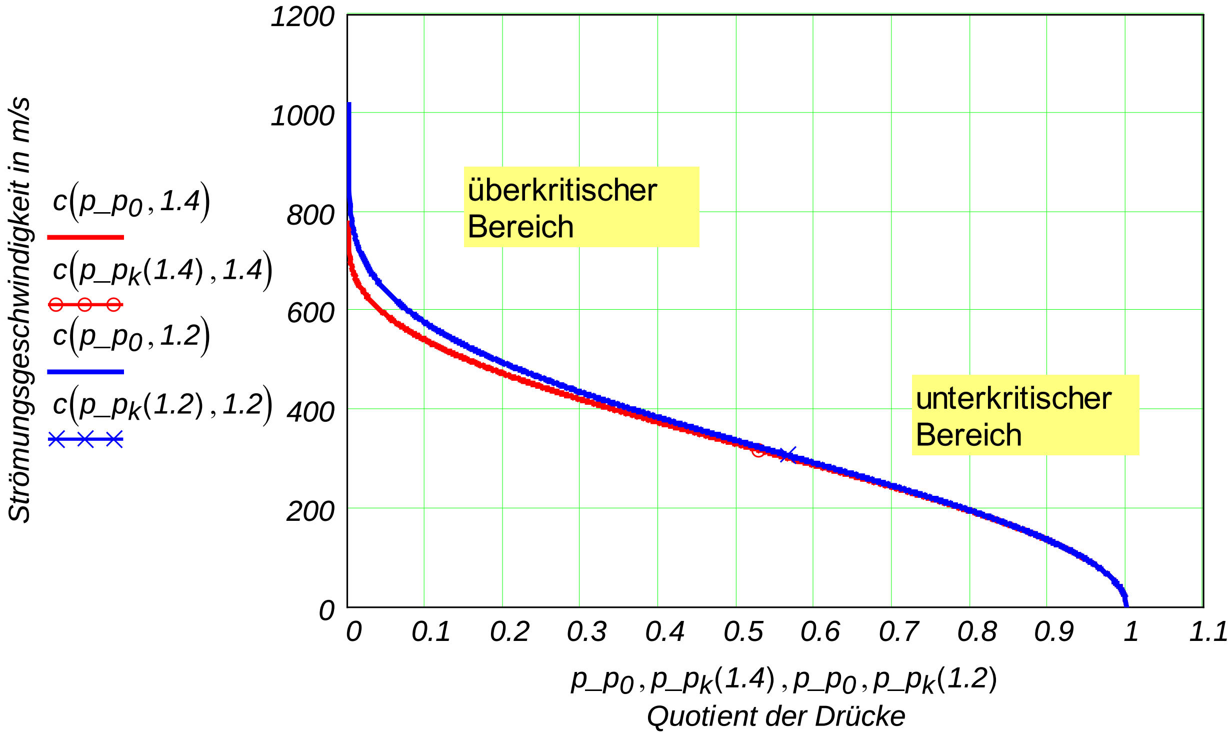
Für die Dichte

$$\rho(p\_p_0, \kappa) := \rho_0 \cdot p\_p_0^{\frac{1}{\kappa}}$$



Für die Strömungsgeschwindigkeit

$$c(p\_p_0,\kappa) := \sqrt{\frac{2\cdot\kappa}{\kappa-1}\cdot\frac{p_0}{\rho_0}\cdot\left(1-p\_p_0^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right)}$$



Beispiel

An einem Druckbehälter, in dem sich Luft unter $p_B := 6\cdot bar$ und $T_B := 300\cdot K$ befindet, ist eine Laval-Düse angeschlossen, deren kleinster Querschnitt $A_{min} := 1\cdot cm^2$ beträgt. Der Außendruck beträgt $p_u := 1\cdot bar$. Die Luft ist als Idealgas mit $\kappa := 1.4$, $R_L := 287.2\cdot\frac{J}{kg\cdot K}$ und die Strömung isentrop stationär zu betrachten. Man bestimme:

1. Austretender Massenstrom
2. Austretende Strömungsgeschwindigkeit
3. Austretende Temperatur
4. Austretende Mach-Zahl
5. Austrittsfläche für Auslegungszustand (E)
6. Mach-Zahl an der Stelle, wo der Querschnitt 20% größer als A_{min} ist.

Lösung

1. $m'_a = A_{min} \cdot \Psi_{max} \cdot \sqrt{2 \cdot p_B \cdot \rho_B}$ $\rho_B := \dfrac{p_B}{R_L \cdot T_B}$ $\rho_B = \blacksquare \dfrac{kg}{m^3}$

$\psi_{max}(\kappa) := \left(\dfrac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}} \cdot \sqrt{\dfrac{\kappa}{\kappa+1}}$ $\psi_{max}(\kappa) = \blacksquare$ $bar \equiv 10^5 \cdot Pa$

$m'_a := A_{min} \cdot \Psi_{max}(\kappa) \cdot \sqrt{2 \cdot p_B \cdot \rho_B}$ $m'_a = \blacksquare \dfrac{kg}{s}$

2. $c_a := \sqrt{\dfrac{2 \cdot \kappa}{\kappa - 1} \cdot \dfrac{p_B}{\rho_B} \cdot \left[1 - \left(\dfrac{p_u}{p_B}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right]}$ $c_a = 491.577 \dfrac{m}{s}$

3. $T_a := T_B \cdot \left(\dfrac{p_u}{p_B}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}$ $T_a = 179.801 K$

4. Bernoulli-Gl. zwischen Behälter und Austritt, wobei $a_B := \sqrt{\dfrac{\kappa \cdot p_B}{\rho_B}}$

$\dfrac{a_B^2}{\kappa - 1} = \dfrac{a_a^2}{\kappa - 1} + \dfrac{c_a^2}{2}$ $a_a := \sqrt{a_B^2 - \dfrac{\kappa - 1}{2} \cdot c_a^2}$ $a_a = 268.876 \dfrac{m}{s}$

oder direkt $a_a := \sqrt{\kappa \cdot R_L \cdot T_a}$ $a_a = 268.876 \dfrac{m}{s}$

$Ma_a := \dfrac{c_a}{a_a}$ $Ma_a = 1.828$

5. $A_a := A_{min} \cdot \dfrac{1}{Ma_a} \cdot \left[1 + \dfrac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \cdot \left(Ma_a^2 - 1\right)\right]^{\frac{\kappa+1}{2 \cdot (\kappa-1)}}$ $A_a = 1.47 cm^2$

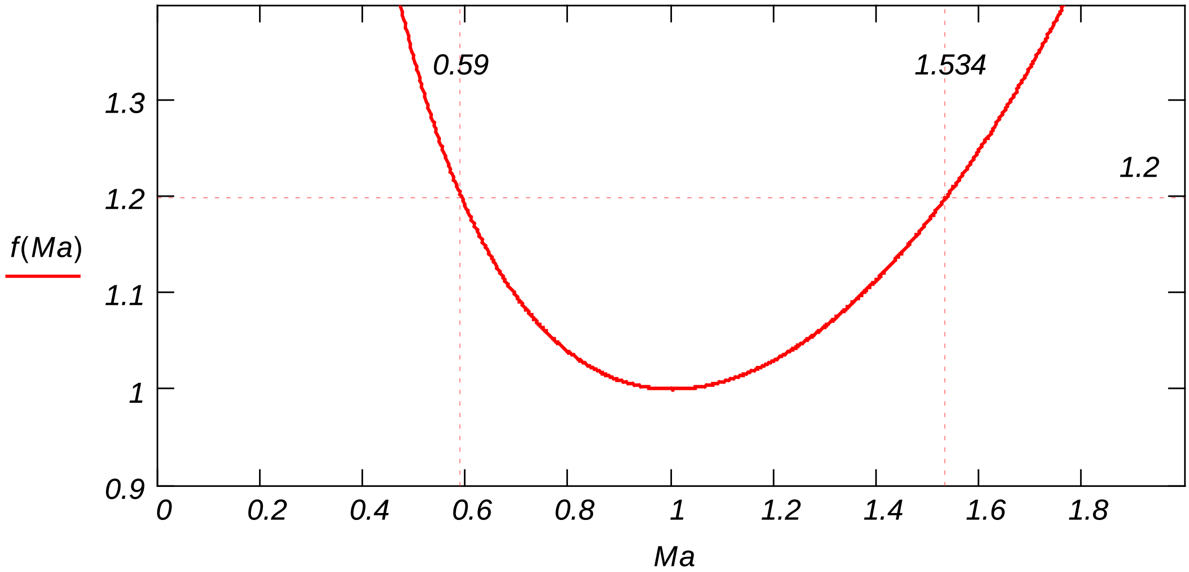
oder $m'_a = A_a \cdot \rho_a \cdot c_a$ $\rho_a := \dfrac{p_u}{R_L \cdot T_a}$ $\rho_a = 1.937 \dfrac{kg}{m^3}$

$A_a := \dfrac{m'_a}{\rho_a \cdot c_a}$ $A_a = 1.47 cm^2$

Der Massenstrom im Austritt kann auch mit Hilfe der Ausflussfunktion ermittelt werden, wobei diesmal keine Begrenzung mehr eingeführt wird.

$m_a := A_a \cdot \Psi\left(\dfrac{p_u}{p_B}, \kappa\right) \cdot \sqrt{2 \cdot p_B \cdot \rho_B}$ $m_a = \blacksquare \dfrac{kg}{s}$

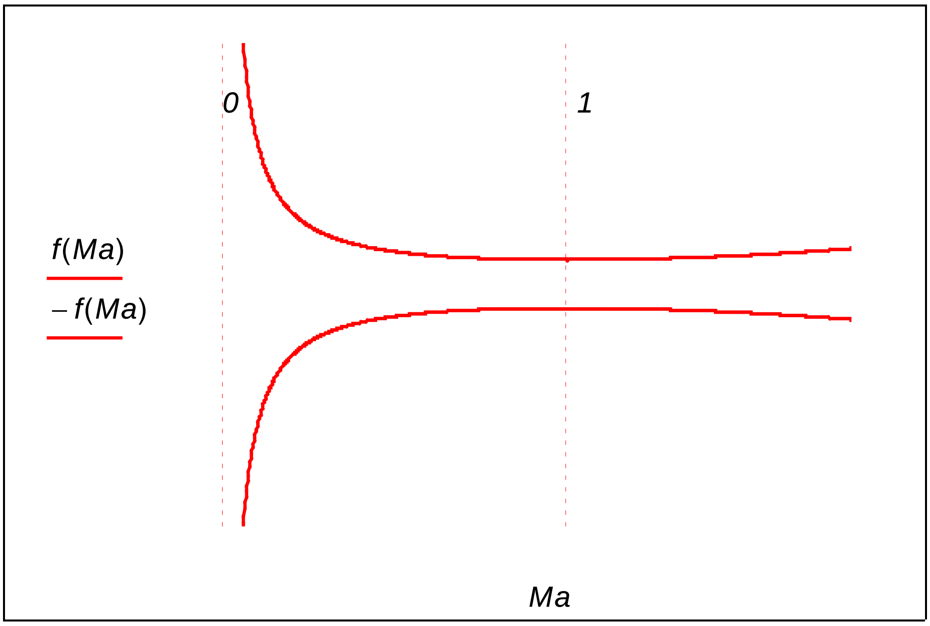
6. $\frac{A}{A_{min}} = 1.2$ $\qquad f(Ma) := \frac{1}{Ma} \cdot \left[1 + \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \cdot \left(Ma^2 - 1\right)\right]^{\frac{\kappa+1}{2\cdot(\kappa-1)}}$



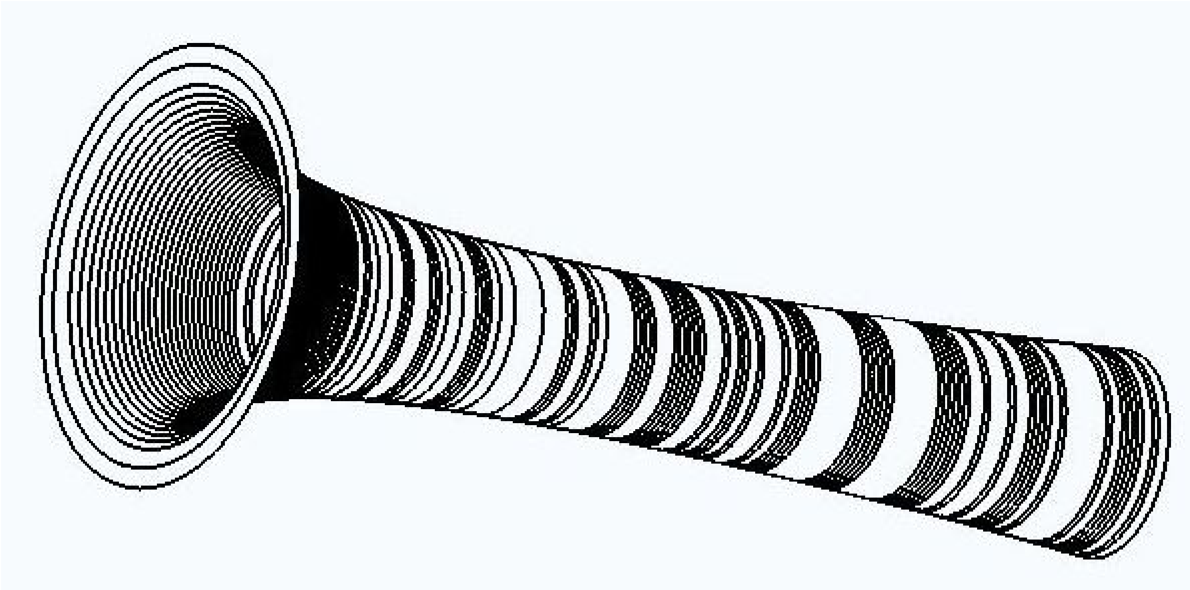
$Ma_1 := wurzel(f(Ma) - 1.2, Ma, 0.1, 1)$ $\qquad Ma_1 = 0.59$

$Ma_2 := wurzel(f(Ma) - 1.2, Ma, 1, 2)$ $\qquad Ma_2 = 1.534$

Hinweis: Zur Bestimmung des Profils der Laval-Düse wurde folgendes Bild verwendet, wobei die Mach-Zahl linear entlang der Düse ansteigen sollte. Somit liegt der minimaler Querschnitt, wo $Ma = 1$, fast an Düsenmitte.



Die folgende 3D-Darstellung der Laval-Düse wurde mit dem CAD-Programm SolidWorks erstellt.



Beweisführung für die Formel (10) durch Integration der Formel (9')

Nach Trennung der Veränderlichen Ma-Zahl links und Querschnitt A rechts in der Gl. 9, es resultiert die gewöhnliche Dgl.

$$\frac{Ma^2-1}{Ma\cdot\left(1+\frac{\kappa-1}{2}\cdot Ma^2\right)}\cdot dMa = \frac{dA}{A}$$

Setzt man anstelle von Ma-Zahl unter dem Integral die übliche Mathe-Veränderliche "x" und die Integrationsgrenzen ein:

a) unten im engsten Querschnitt ($A_{min} = A_k$ und $Ma_k = 1$) und

b) oben in einem beliebigen Querschnitt der Düse oder des Rohrs A (wo die Ma-Zahl einfach Ma genommen ist),

ergibt sich

$$\int_1^{Ma}\frac{x^2-1}{x\cdot\left(1+\frac{\kappa-1}{2}\cdot x^2\right)}\,dx = \int_{A_k}^{A}\frac{1}{A}\,dA$$

Der linke Term läßt sich durch Partialbruckzerlegung für das Integrieren entsprechend umformen

$$\frac{x^2-1}{x\cdot\left(1+\frac{\kappa-1}{2}\cdot x^2\right)} = \frac{-1}{x}+x\cdot\frac{\kappa+1}{2+x^2\cdot\kappa-x^2}$$

Damit ergibt sich für den linken Term nach Integrieren und Einsetzen der Integrationsgrenzen

für den Grenzwert x = Ma für den Grenzwert x = 1

$$(-ln(Ma))+\frac{\kappa+1}{2\cdot(\kappa-1)}\cdot ln\left(2+Ma^2\cdot\kappa-Ma^2\right)-\left[0+\frac{\kappa+1}{2\cdot(\kappa-1)}\cdot ln(2+\kappa-1)\right]$$

Nach dem Zusammenfassen es resultiert

$$ln\left[\frac{1}{Ma}\cdot\left[\frac{2+(\kappa-1)\cdot Ma^2}{\kappa+1}\right]^{\frac{\kappa+1}{2\cdot(\kappa-1)}}\right] = ln\left(\frac{A}{A_k}\right)$$

Der Term aus dem eckigen Klammer läßt sich umformen zu dem aus der Gl. (10), d.h.

$$1+\frac{\kappa-1}{\kappa+1}\cdot\left(Ma^2-1\right) = \frac{\kappa+1+(\kappa-1)\cdot Ma^2-\kappa+1}{\kappa+1} = \frac{2+(\kappa-1)\cdot Ma^2}{\kappa+1}$$

und damit die Formel (10) ist bewiesen.

Wenn die Integration zwischen zwei willkürlichen Zuständen 1 und 2 mit den Integrationsgrenzen Ma_1 und A_1 bzw. Ma_2 und A_2 entlang:

- einer einfachen Düse,
- einer Laval-Düse
- oder eines einfaches Rohr mit variablen Querschnitt stattfindet,

resultiert die allgemeine Formel (11)

$$\frac{Ma_1}{Ma_2}\cdot\left[\frac{2+(\kappa-1)\cdot Ma_2^{\,2}}{2+(\kappa-1)\cdot Ma_1^{\,2}}\right]^{\frac{\kappa+1}{2\cdot(\kappa-1)}} = \frac{A_2}{A_1} \qquad \text{Gl. (11)}$$

Beispiel 2

In der Laval-Düse aus dem vorigen Beispiel (isentrope stationäre Strömung von Luft als Idealgas mit konstanten Wärmekapazitäten) kennt man den Zustand 1 an der Stelle mit dem Querschnitt A_1. Gesucht sind die Zustände 2 an den Stellen mit dem Querschnitt A_2.

Zustand 1 links (nah zum Behälter)	Zustand 2 rechts (nah zur Umgebung)	Stoffwerte der Luft
$A_1 := 1.5\cdot cm^2$	$A_2 := 1.25\cdot cm^2$	$R_L := 287\cdot\frac{J}{kg\cdot K}$
$Ma_1 := 0.35$		$\kappa := 1.4$
$p_1 := 2\cdot bar$		
$T_1 := 300\cdot K$		

Lösungsweg über Gl. (11)

Aus der Gl. (11) lässt sich die Ma_2 berechnen, wobei die Nullstelle leider nur numerisch (d.h. keine analytische Lösung ist möglich) bestimmt werden kann. Die numerische Lösung kann entweder durch das Programmieren der Gl. im Taschenrechner und nach der Nullstelle automatisch suchen, oder zufuß finden, d.h. anhand einer tabellarischen Berechnung und einer graphischen Darstellung. Hier unten wird die zweite Lösungsart ausgewählt und mit de automatischen des MathCAD-Programms verglichen.

Es ist zu empfehlen, die Lösbarkeit des Problems zu prüfen. Diese Arbeit ist übrigens nicht umsonst, da damit auch die zweite Lösungsart dabei ermöglicht wird. Man stellt dafür die beide Terme der Gl. (11) graphisch dar (s. unten die Tabelle). Der linke Term läßt sich auf dem Taschenrechner programmieren, wobei Ma_2 die Veränderliche darstellt. Der rechte Term ist eine Konstante.

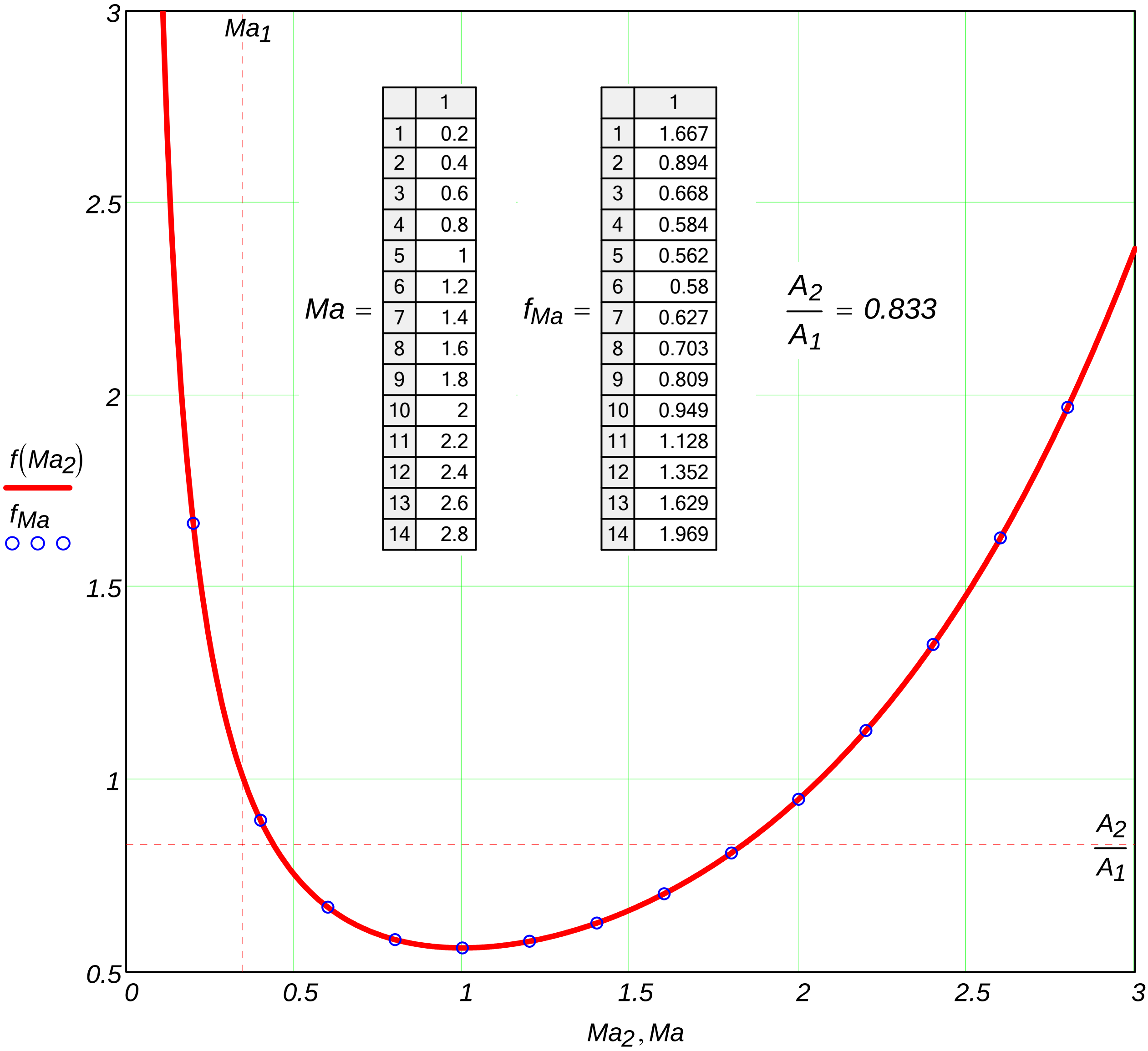
$$f(Ma_2) := \frac{Ma_1}{Ma_2}\cdot\left[\frac{2+(\kappa-1)\cdot Ma_2^{\,2}}{2+(\kappa-1)\cdot Ma_1^{\,2}}\right]^{\frac{\kappa+1}{2\cdot(\kappa-1)}} \qquad \frac{A_2}{A_1} = 0.833$$

Aus der graphischen Darstellung kann man erkennen, dass der Schnittpunkt der Vertikale Ma_1 und der Horizontale A_2/A_1 nicht auf die Kurve liegt (durch Zufall kann aber auch so was eintreten). Gesucht sind die Zahlenwerte von Ma_2 zu den Schnittpunkten der Kurve mit der Horizontale A_2/A_1. Damit hat diese Aufgabe zwei Lösungen, eine vor und einer hinter dem minimalen Querschnitt (d.h. zu Ma = 1) der Laval-Düse.

Zur Überprüfung wird die Gl. (11) numerisch mit der Routine "Wurzel" von MathCAD gelöst, wobei die Grenzen des Lösungsbereichs entsprechend ausgewählt sind (links 0.1 bis 0.9 und rechts 1.1 bis 3). Die Auswahl der Grenzen, zwischen denen die Nullstelle gesucht wird, sollte übrigens auch auf dem programmierbaren Taschenrechner treffen.

$$Ma_{2\_links} := wurzel\left(f(Ma_2) - \frac{A_2}{A_1}, Ma_2, 0.1, 0.9\right) \qquad Ma_{2\_links} = 0.437$$

$$Ma_{2\_rechts} := wurzel\left(f(Ma_2) - \frac{A_2}{A_1}, Ma_2, 1.1, 3\right) \qquad Ma_{2\_rechts} = 1.838$$



Ma =

	1
1	0.2
2	0.4
3	0.6
4	0.8
5	1
6	1.2
7	1.4
8	1.6
9	1.8
10	2
11	2.2
12	2.4
13	2.6
14	2.8

f_{Ma} =

	1
1	1.667
2	0.894
3	0.668
4	0.584
5	0.562
6	0.58
7	0.627
8	0.703
9	0.809
10	0.949
11	1.128
12	1.352
13	1.629
14	1.969

$$\frac{A_2}{A_1} = 0.833$$

Die restlichen Größen in den Zuständen **2 links** und **2 rechts** können mit Hilfe der Kontinuität, Bernoulli, Ma-Zahl und isentropen Gleichungen bestimmt bzw. überprüft werden.

$a_1 := \sqrt{\kappa \cdot R_L \cdot T_1}$ $\qquad a_1 = 347.189\ \frac{m}{s}$

$c_1 := Ma_1 \cdot a_1$ $\qquad c_1 = 121.516\ \frac{m}{s}$

$\rho_1 := \frac{p_1}{R_L \cdot T_1}$ $\qquad \rho_1 = 2.323\ \frac{kg}{m^3}$

$$\frac{c_1^{\,2}}{2} + \frac{a_1^{\,2}}{\kappa - 1} = \frac{c_2^{\,2}}{2} + \frac{a_2^{\,2}}{\kappa - 1} \qquad Ma_2 = \frac{c_2}{a_2}$$

$$\frac{c_1^{\,2}}{2} + \frac{a_1^{\,2}}{\kappa - 1} = \frac{Ma_2^{\,2} \cdot a_2^{\,2}}{2} + \frac{a_2^{\,2}}{\kappa - 1} \qquad \frac{a_2^{\,2}}{\kappa - 1} \cdot \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} \cdot Ma_2^{\,2}\right) = \frac{c_1^{\,2}}{2} + \frac{a_1^{\,2}}{\kappa - 1}$$

damit

$$a_2 = \sqrt{\frac{(\kappa - 1) \cdot \left(\frac{c_1^{\,2}}{2} + \frac{a_1^{\,2}}{\kappa - 1}\right)}{1 + \frac{\kappa - 1}{2} \cdot Ma_2^{\,2}}}$$

$$\frac{p_1}{\rho_1^{\,\kappa}} = \frac{p_2}{\rho_2^{\,\kappa}} \quad => \quad \frac{\kappa \cdot p_1}{\rho_1 \cdot \rho_1^{\,\kappa-1}} = \frac{\kappa \cdot p_2}{\rho_2 \cdot \rho_2^{\,\kappa-1}} \quad => \quad \frac{a_1^{\,2}}{\rho_1^{\,\kappa-1}} = \frac{a_2^{\,2}}{\rho_2^{\,\kappa-1}}$$

damit

$$\rho_2 = \rho_1 \cdot \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\frac{2}{\kappa-1}}$$

<u>Zustand **2 links**</u>

$$a_{2\_links} := \sqrt{\frac{(\kappa - 1) \cdot \left(\frac{c_1^{\,2}}{2} + \frac{a_1^{\,2}}{\kappa - 1}\right)}{1 + \frac{\kappa - 1}{2} \cdot Ma_{2\_links}^{\,2}}} \qquad a_{2\_links} = 344.889\ \frac{m}{s}$$

$c_{2\_links} := Ma_{2\_links} \cdot a_{2\_links}$ $\qquad c_{2\_links} = 150.746\ \frac{m}{s}$

$$\rho_{2\_links} := \rho_1 \cdot \left(\frac{a_{2\_links}}{a_1}\right)^{\frac{2}{\kappa-1}} \qquad \rho_{2\_links} = 2.247\ \frac{kg}{m^3}$$

Zustand **2 rechts**

$$a_{2\_rechts} := \sqrt{\frac{(\kappa - 1) \cdot \left(\frac{c_1^2}{2} + \frac{a_1^2}{\kappa - 1}\right)}{1 + \frac{\kappa - 1}{2} \cdot Ma_{2\_rechts}^2}} \qquad a_{2\_rechts} = 271.46 \frac{m}{s}$$

$$c_{2\_rechts} := Ma_{2\_rechts} \cdot a_{2\_rechts} \qquad c_{2\_rechts} = 499.011 \frac{m}{s}$$

$$\rho_{2\_rechts} := \rho_1 \cdot \left(\frac{a_{2\_rechts}}{a_1}\right)^{\frac{2}{\kappa - 1}} \qquad \rho_{2\_rechts} = 0.679 \frac{kg}{m^3}$$

Überprüfen der Kontinuität $\quad m'_1 = m'_2 \quad \rho_1 \cdot A_1 \cdot c_1 = \rho_2 \cdot A_2 \cdot c_2$

$$\rho_1 \cdot A_1 \cdot c_1 = 42.34 \frac{gm}{s} \qquad \rho_{2\_links} \cdot A_2 \cdot c_{2\_links} = 42.34 \frac{gm}{s}$$

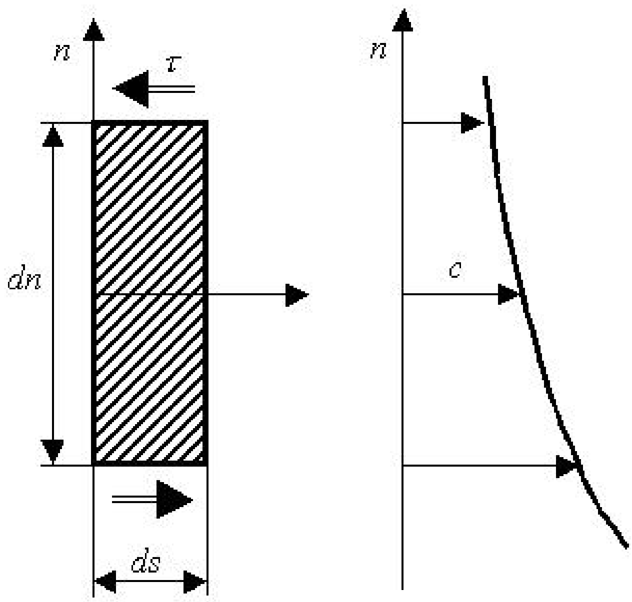
$$\rho_{2\_rechts} \cdot A_2 \cdot c_{2\_rechts} = 42.34 \frac{gm}{s}$$

3. Strömungsprozesse mit Reibung

3.1. Grundsätzliches zum Reibungseinfluss. Kennzahlen

Wie unter § 2.2 bzw. §2.3 gezeigt, können Reibungsverluste im Impulssatz bzw. Energiesatz berücksichtigt werden.

Man stellt nun die grundsätzliche Frage, wovon hängt die spezifische (d.h. auf Masse bezogene) Reibungskraft innerhalb einer Strömung?
Um sie beantworten zu können, wird ein 1D-Fluidelement (als Teil eines Stromfadens) genommen, im dessen Querschnitt (d.h. in Normalrichtung n) ein willkürliches Geschwindigkeitsprofil $c = f(n)$ vorliegt (s. Bild).



Dieses Geschwindigkeitsprofil entsteht als Folge der Schubspannung τ zwischen den Fluidschichten. Somit ergibt sich

$$\frac{Reibungskraft}{Masse} = \frac{dR}{dm} = \frac{-1}{\rho} \cdot \frac{d}{dn} |\tau|$$

wobei τ hier im Betrag genommen werden muss, um das richtige Vorzeichen für die Reibungskraft zu resultieren.
Für ein **Newtonsche Fluid** gilt es für die Schubspannung der rechts stehende Ausdruck.

$$\tau = \begin{cases} \eta \cdot \dfrac{dc}{dn}, & \text{wenn } \dfrac{dc}{dn} > 0 \\ -\eta \cdot \dfrac{dc}{dn}, & \text{anderfalls} \end{cases}$$

Setzt man nun dieses Ergebnis in die Formel der spezifischen Reibungskraft ein und betrachtet die dynamische Viskosität als konstant im Elementquerschnitt, so ergibt sich

$$\frac{dR}{dm} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{d}{dn} \left(\eta \cdot \frac{dc}{dn} \right) = \frac{\eta}{\rho} \cdot \frac{d^2}{dn^2} c = \nu \cdot \frac{d^2}{dn^2} c$$

Die Reibungskraft hängt also von der zweiten Ableitung der Geschwindigkeit ab. Die Ursache hierfür liegt offenbar darin, dass es auf die Änderung der Schubspannung senkrecht zur Strömungsrichtung ankommt.

Nun wird der Impulssatz geschrieben (s. §2.2.1.1, Gl. 3), wobei hier der Index τ auf die partielle Ableitung nach der Zeit hinweist.

$$c_\tau + c \cdot c_s + \frac{1}{\rho} \cdot p_s = -g \cdot z_s - \frac{\lambda}{D_H} \cdot \frac{c \cdot |c|}{2}$$

wobei die spezifische Reibungskraft in der oben gewonnen Form eingetragen wird.

$$\frac{d}{d\tau}c + c\cdot\frac{d}{ds}c + \frac{1}{\rho}\cdot\frac{d}{ds}p + g\cdot\frac{d}{ds}z = \nu\cdot\frac{d^2}{dn^2}c$$

Man stellt nun die auf ein Massenelement wirkenden Kräfte zusammen. Es handelt sich dabei um typische Vertreter der entsprechenden Einflüsse. In der untersten Zeile sind die einzelnen Terme durch charakteristische Bezugsgröße für Zeit τ, Länge L, Geschwindigkeit c, Dichte ρ und Druck p des Stromfadens dargestellt. Man benutzt hier in beiden Achsenrichtungen s und n denselben Längenmaßstab L.

	Trägheit	**Trägheit**			
Effekt	**a**	**b**	**Druck**	**Schwere**	**Reibung**
$\frac{Kraft}{Masse}$	$\frac{d}{d\tau}c$	$c\cdot\frac{d}{ds}c$	$\frac{1}{\rho}\cdot\frac{d}{ds}p$	$g\cdot\frac{d}{ds}z$	$\nu\cdot\frac{d^2}{dn^2}c$
charakteristische Größen	$\frac{c}{\tau}$	$\frac{c^2}{L}$	$\frac{p}{\rho\cdot L}$	g	$\frac{\nu\cdot c}{L^2}$

Aus diesen fünf typischen spezifischen Kräften lassen sich vier unabhängige dimensionslose Kraftverhältnisse = **Kennzahlen** bilden. Diese Kennzahlen charakterisieren ein Stromfeld und beschreiben die eingehenden physikalischen Effekte. In folgenden werden einige wichtige Kennzahlen vorgestellt:

3.1.1. Euler- oder Newton-Zahl

Diese Kennzahl ist definiert durch

$$\frac{Druckkraft}{Trägheitskraft\,(b)} = \frac{\frac{p}{\rho\cdot L}}{\frac{c^2}{L}} = \frac{p}{\rho\cdot c^2} = Eu = Ne$$

Für ein kompressibles Fluids, noch genauer für ein Idealgas, wird die Euler-Zahl zu

$$Eu = \frac{p}{\rho\cdot c^2} = \frac{\kappa\cdot p}{\rho}\cdot\frac{1}{c^2}\cdot\frac{1}{\kappa} = \frac{a^2}{c^2}\cdot\frac{1}{\kappa} = \frac{1}{\kappa\cdot Ma^2}$$

3.1.2. Froude-Zahl

Diese Kennzahl ist definiert durch

$$\frac{Trägheitskraft\,(b)}{Schwerkraft} = \frac{c^2}{L\cdot g} = Fr$$

Die Froude-Zahl ist überall dort von Wichtigkeit, wo die **Schwerkraft** die Strömung wesentlich beeinflusst, z.B. in Gewässern mit freier Oberfläche.

3.1.3. Strouhal-Zahl

Diese Kennzahl ist definiert durch

$$\frac{Trägheitskraft(a)}{Trägheitskraft(b)} = \frac{\frac{c}{\tau}}{\frac{c^2}{L}} = \frac{L}{\tau \cdot c} = Str$$

Diese Kennzahl charakterisiert **instationäre** Strömungsvorgänge wie z.B. die, die in allen periodisch arbeitenden Kraft- und Arbeitsmaschinen auftreten. Um festzustellen, ob eine Strömung als stationär angesehen werden kann, muss die Strouhal-Zahl ermittelt werden. Im Falle von ***Str* << *1***, darf die Strömung als **stationär** betrachtet und somit die vereinfachte Bernoulli-Gleichung angewandt werden.

3.1.4. Reynolds-Zahl

Diese Kennzahl ist definiert durch

$$\frac{Trägheitskraft(b)}{Reibungskraft} = \frac{\frac{c^2}{L}}{\frac{\nu \cdot c}{L^2}} = \frac{c \cdot L}{\nu} = Re$$

Diese sehr wichtige Kennzahl für alle Strömungsvorgänge erfasst den **Reibungseinfluss**. Ist ***Re* >> *1***, d.h. ist die Trägheitskraft (b) sehr viel größer als die Reibungskraft, so ist die Reibung **innerhalb** des Stromfeldes von geringem Einfluss. Die Viskosität spielt nur in Wandnähe aufgrund der Haftbedingung in der Grenzschicht eine Rolle.

3.2. Laminare und Turbulente Strömung

Man beobachtet in Experimenten mit Farbfaden z.B. in Rohrströmungen, dass bei gegebenen Rohrinnendurchmessern und Fluidviskosität zwei unterschiedliche Situationen in Abhängigkeit der Strömungsgeschwindigkeit auftreten:

- Der Farbfaden bleibt als Faden im ganzen Strömungsfeld → **laminare Strömung**
- Der Farbfaden schlägt in einem sichtbaren Austausch mit Verwirbelungen um, und die Farbe verbreitet sich in ganzen Rohrquerschnitt → **turbulente Strömung.**

Hier sind einige Beispiele mit Animationen für turbulente Strömungen (s. Erklärungen unten unter §3.4.1):

- Beispiel 1 (mpg, 1.6 MB)
- Beispiel 2, Variante 1 (mpg, 0.6 MB) und Variante 2 (mpg, 3.3 MB)
- Beispiel 3 (mpg, 1.3 MB) mit der turbulenten Strömung in einen kalten Wohnraum mit Fenster und Heizkörper, wenn der Heizkörper plötzlich warm wird.

Für eine Rohrströmung findet man immer wieder, dass die Grenze zwischen laminarer und turbulenter Strömung bei ca. $\boldsymbol{Re = 2300}$ liegt. Diese Grenze in Reynolds-Zahl ist unabhängig von Fluideingeschaften, solange es um ein (nahezu) Newtonsches Fluid handelt, und vom Rohrdurchmesser. Wenn der Querschnitt nicht Kreisförmig ist, wird dann an seiner Stelle der hydraulische Durchmesser in Reynolds-Zahl-Formel eingesetzt.
Reynolds hat den Übergang der laminaren in die turbulente Strömung untersucht und gefunden, dass dieser allein von der Re-Zahl abhängt. Aufgrund von Beobachtungen hat er vermutet, dass es sich hierbei um ein Stabilitätsproblem handelt. Die laminare Strömung wird bei höheren Re-Zahlen instabil gegenüber Störungen (z.B. Vibrationen), die in Natur und Technik immer vorhanden sind. D.h. diese kleinen Störungen, verursachen den Umschlag von laminarer in turbulenter Strömung. Je heftiger diese Störungen sind, desto früher (d.h. bei kleineren Re-Zahlen) findet der Umschlag statt.

3.3. Druckabfall in Kreisrohren bei laminarer und turbulenter Durchströmung

Der Druckabfall (Druckverlust) infolge der verteilten Strömungsverluste (innere Reibung und Reibung mit den Wänden) ist für eine **laminare Strömung** gegeben durch

$$\Delta p = \lambda_{lam} \cdot \frac{L}{D_H} \cdot \frac{\rho \cdot c^2}{2} \qquad \text{wobei} \qquad \lambda_{lam} = \frac{64}{Re_{D_H}} \qquad \text{mit} \qquad Re_{D_H} = \frac{c \cdot D_H}{\nu}$$

Diese Berechnungsformel für λ_{lam} kann hergeleitet werden. Im Gegenteil sind alle weiter unten vorgestellten Formeln der **turbulenten Strömung** nur durch Bearbeitung von experimentellen Untersuchungen gewonnen. Jeder Forscher hat für den Bereich, den er untersucht hat, eine oder mehrere Formeln gefunden. Hier werden für **glatte Rohre** nur zwei vorgestellt:

$$\lambda_{turb} = \frac{0.3164}{\left(Re_{D_H}\right)^{0.25}}$$

Blasius-Formel in expliziter Darstellung

gültig bis $Re_{D_H} \le 10^5$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_{turb}}} = 2 \cdot \log_{10}\left(Re_{D_H} \cdot \sqrt{\lambda_{turb}}\right) - 0.8$$

Prandtl-Formel in impliziter Darstellung

gültig bis $Re_{D_H} \le 3 \cdot 10^6$

Für den Fall der rauhen Rohre wird die Sandkornrauhigkeit k eingeführt. Die Variation von λ ist in diesem Fall als **Nikuradse**-Diagramm bekannt. Der Rohrdurchmesser ist hier als d angegeben. In einer zweiten und dritten Variante des Nikuradse-Diagramms sind die Rauhigkeitshöhe mit ε und der Rohrinnendurchmesser mit D bezeichnet.
Beachtlich ist hier die Tatsache, dass die Wandrauhigkeit im **Laminarbereich** keinen Einfluss hat. Dies ist einfach dadurch zu erklären, dass in diesem Fall nur die Reibungskraft zwischen den Fluidschichten wichtig ist. Die Rauhigkeit kann nur mehrere Schichten blockieren, aber letztendlich die Reibung wirkt immer nur zwischen den parallelen Fluidschichten.
Im Gegenteil ist die Situation im **Turbulentbereich**. Man muss hier zuerst feststellen, dass jede turbulente Strömung in der Wandnähe eine **laminare Grenzschicht** hat. Die Dicke

dieser Grenzschicht ist mit der Re-Zahl umgekehrt proportional. Nun, wenn die Rauhigkeitshöhe kleiner als die Dicke der laminaren Grenzschicht ist, dann wird die turbulente Strömung (als Kernströmung) von der Anwesenheit der Wandrauhigkeit nicht beeinflusst. Entgegen ist der Fall bei größeren Wandrauhigkeiten, die aus der Grenzschicht in turbulenten Kern der Strömung eindringen.
Der Druckabfall (Druckverlust) infolge der verteilten Strömungsverluste (innere Reibung und Reibung mit den Wänden) ist für eine **turbulente Strömung** (ähnlich wie bei laminarer Strömung) gegeben durch

$$\Delta p = \lambda_{turb} \cdot \frac{L}{D_H} \cdot \frac{\rho \cdot c^2}{2}$$

3.4. Widerstand und Druckverlust

Der Gesamtwiderstand (1) ist die Summe aus Reibungswiderstand (2) und Druckverlustwiderstand (3). Was die Messungen betrifft, so ergibt sich (1) aus einer einfachen Kraftmessung und (3) durch Integration der Druckverteilung über den Körper. Der in der Regel schwerer messbare Anteil (2) stellt sich dann als Differenz der Terme (1) und (3) dar.
Für eine Minimierung des Gesamtwiderstandes (3) gelten folgende Aussagen:

- Der Reibungswiderstand (2) ist dadurch zu minimieren, dass man nach Möglichkeit für eine laminare Grenzschicht sorgt.
- Der Druckverlustwiderstand (3) kann man im Falle der Umströmung eines Körpers nur dadurch verringern, dass man die Ablösestelle möglichst weit ans Körperheck verschiebt.
- Beide Einflüsse überlagern sich und variieren teilweise gegenläufig, und somit sollen beide gleichzeitig optimiert (d.h. den Kompromiss suchen) werden.

3.4.1. Umströmungsprobleme

Der Widerstand eines Körpers in eine Strömung ist gegeben durch

$$F_W = \frac{\rho \cdot c^2}{2} \cdot A \cdot c_W$$

wobei c_W der Widerstandsbeiwert oder der *c*-Wert und A eine charakteristische Bezugsfläche bedeuten. Der dimensionslose *c*-Wert hängt von allen Kennzahlen des Problems wie *Re, Ma* usw. ab.

Hierunter werden zwei Beispiele von solchen Strömungen vorgestellt:

- Im Beispiel 1 (mpg, 1.6 MB) wird mit Hilfe einer Animation die Umströmung eines Zylinders in einem Windkanal untersucht, wobei der Zylinder geringfügig asymmetrisch im Kanal angeordert ist. Dadurch entsteht eine turbulente Strömung mit relativ intensiven Verwirbelungen hinter dem Zylinder. Die Farbe zeigt die Druckverteilung an, wobei rot für hohe und blau für tiefe Druckwerte stehen.
- Im Beispiel 2 wird die Umströmung eines Sattelschleppers bei Leerfahrt in einem Windkanal in zwei Varianten animiert. Die Farbe zeigt auch hier die Druckverteilung an, wobei wie oben rot für hohe und blau für tiefe Druckwerte stehen.

- Im Beispiel 2, Variante 1 (mpg, 0.6 MB) ist nur die Druckverteilung mit der turbulenten Strömung und Verwirbelungen hinter Fahrzeug vorgestellt.
- Im Beispiel 2, Variante 2 (mpg, 3.3 MB) sind auch die Teilchen während der Umströmung dargestellt.

3.4.2. Durchströmungsprobleme

Hier geht es vornehmlich um die Bestimmung des Druckverlustes

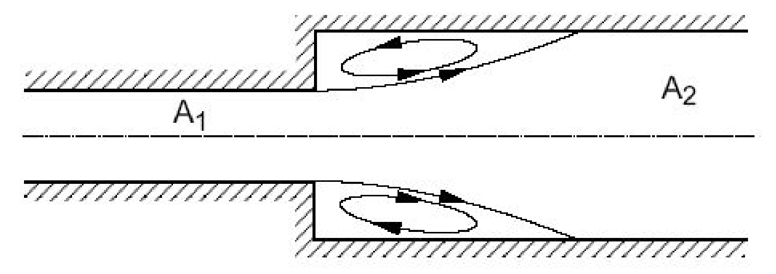
$$\Delta p_V = \frac{\rho \cdot c^2}{2} \cdot \zeta_V$$

wobei ζ_V bezeichnet hier den Verlustkoeffizienten und hängt wie c_W von den dimensionslosen Kenngrößen des Problems ab.

Beispiele

- Für den Fall der **plötzlichen Erweiterung** eines Rohres, also für den so genannten Borda-Carnot-Stossverlust kann der Druckverlustkoeffizient ζ im Falle einer turbulenten Strömung auch analytisch bestimmt werden (aber dies ist nur ein Einzelfall)

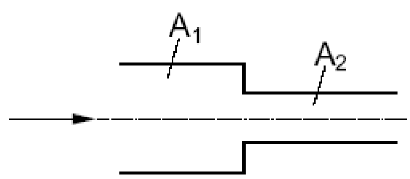
$$\zeta_{12} = \left(\frac{A_2}{A_1} - 1 \right)^2$$



- Für die **plötzliche Verengung** gilt es

$$\zeta_{21} = \alpha \cdot \left(\frac{A_2}{A_1} - 1 \right)^2$$

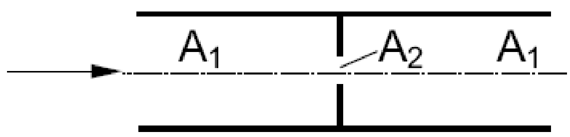
mit $\alpha = \begin{Bmatrix} 0{,}6 \\ 1{,}0 \\ 1{,}5 \end{Bmatrix}$ für $\frac{A_2}{A_1} = \begin{Bmatrix} \to 0 \\ \cong 0{,}3 \\ > 0{,}6 \end{Bmatrix}$



- Für den Fall einer **Blende im Rohr** gilt es

$$\zeta = \left(\frac{A_1}{A_2 \cdot \psi} - 1 \right)^2$$

mit $\psi = 0.63 + 0.37 \cdot \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^3$



Im Falle eines geraden Rohrs ohne weitere Hindernisse gilt es

$$\zeta_V = \lambda \cdot \frac{L}{D_H}$$

Andere Experimentellwerte für verschiedene Rohrkonfigurationen und Hindernisse kann man aus der Literatur (wie z.B. „Strömung und Druckverlust“, Wagner, W., Vogel-Verlag) entnehmen.

Als ein Beispiel ist die stationäre 3D Strömung durch den Einlasskanal eines Dieselmotors (1-Zylinder-Diesel-Forschungsmotors der Firma AVL) vorgestellt. Theoretische Hintergründe und graphische Darstellungen für instationäre, kompressible, quasi-1D Strömung durch das Ansaugrohr dieses Motors findet man unter (pdf, 2.72 MB). Nur Simulationsergebnisse findet man als Unterlage zur Ladungswechselberechnung.

Beispiel

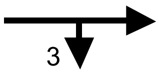
Man bestimme die Einteilung des stationär eintretenden Massenstroms, d.h. das Durchflussverhältnis $m'_{3\_1} = \frac{m'_3}{m'_1}$, in der Rohrverzweigung sowie den Druck p_1 beim Eintritt im Rohr 1, wenn die Geschwindigkeit an dieser Stelle $c_1 := 10 \cdot m \cdot s^{-1}$ beträgt. Das strömende Fluid ist Wasser mit der Dichte $\rho := 1000 \cdot kg \cdot m^{-3}$. Stromabwärts kommunizieren die Rohre 2 und 3 mit der Umgebung, wobei $p_0 := 1 \cdot bar$. Folgende Abmessungen sind gegeben:

$d_1 := 0.1 \cdot m$ $\quad d_2 := 0.08 \cdot m$ $\quad d_3 := 0.06 \cdot m$

$L_1 := 1 \cdot m$ $\quad L_2 := 1.5 \cdot m$ $\quad L_3 := 0.75 \cdot m$

$z_1 := 0 \cdot m$ $\quad z_2 := 0 \cdot m$ $\quad z_3 := -L_3$

Die Druckverlustkoeffizienten sollen aus der folgenden Tabelle entnommen werden:

Durchflußverhältnis $\frac{m'_3}{m'_1}$	1  3 2 **Abzweigwinkel** $\delta_{13} := 90°$					
	Zeta für Abzweig ζ_{13}			Zeta für Durchgang ζ_{12}		
	Durchmesserverhältnis $\frac{d_3}{d_1}$			Durchmesserverhältnis $\frac{d_2}{d_1}$		
	1,0	0,8	0,6	1,0	0,8	0,6
0,2	0,79	0,84	1,00	0,00	0,00	0,00
0,4	0,74	0,88	1,31	0,02	0,02	0,02
0,6	0,81	1,05	1,89	0,08	0,08	0,08
0,8	1,00	1,37	2,72	0,19	0,19	0,19
1,0	1,30	1,82	3,81	0,35	0,35	0,35

Hinweise:

- Die obigen ζ-Werte beziehen sich auf Eingangsrohr 1 und $\lambda := 0.03$.
- Beim Austritt zur Umgebung gelten $\zeta_{20} := 1$, $\zeta_{30} := 1$ auf Rohrzustand bezogen.

Empfohlener Lösungsweg:

- Ein Durchflussverhältnis wird zuerst gewählt (z.B. $m\acute{}_{3\_1} = 0.2$).
- ζ_{12}, ζ_{13} werden aus der Tabelle (ev. durch lineare Interpolation) ermittelt.
- c_2, c_3 und p_1 werden aus Bernoulli-Gleichung 1-2 und 1-3 und aus Kontinuitätsgleichung berechnet. Von den zwei Lösungen der resultierenden 2. Ordnungsgleichung muss nur die passende gewählt werden! Man beachte hier, dass $c_2 < c_{2max}$ wobei $c_2 = c_{2max}$, wenn $m\acute{}_{3\_1} = 0$.
- Ein neues Durchflussverhältnis $m\acute{}_{3\_1n}$ wird ermittelt.
- Wenn $\dfrac{\left|m\acute{}_{3\_1n} - m\acute{}_{3\_1}\right|}{m\acute{}_{3\_1n}} > 1.5\cdot\%$, werden $m\acute{}_{3\_1} = m\acute{}_{3\_1n}$ und die Schritte 2 bis 5 wiederholt.

Lösung

I. Vorbereitung der Gleichungen

Bernoulli-Gleichung auf 1-2

$$p_1 + \rho\cdot\frac{c_1^2}{2} + \rho\cdot g\cdot z_1 = p_0 + \rho\cdot\frac{c_2^2}{2} + \rho\cdot g\cdot z_2 + \rho\cdot\frac{c_1^2}{2}\cdot\left(\lambda\cdot\frac{L_1}{d_1} + \zeta_{12}\right) + \rho\cdot\frac{c_2^2}{2}\cdot\left(\lambda\cdot\frac{L_2}{d_2} + \zeta_{20}\right)$$

gesamt verfügbare sp. Energie beim Eintritt in Rohr 1	gesamt verfügbare sp. Energie beim Austritt aus Rohr 2	sp. Energieverlust entlang des Rohrs 1 und im T-Stück	sp. Energieverlust entlang und im Austritt des Rohrs 2

Bernoulli-Gleichung auf 1-3

$$p_1 + \rho\cdot\frac{c_1^2}{2} + \rho\cdot g\cdot z_1 = p_0 + \rho\cdot\frac{c_3^2}{2} + \rho\cdot g\cdot z_3 + \rho\cdot\frac{c_1^2}{2}\cdot\left(\lambda\cdot\frac{L_1}{d_1} + \zeta_{13}\right) + \rho\cdot\frac{c_3^2}{2}\cdot\left(\lambda\cdot\frac{L_3}{d_3} + \zeta_{30}\right)$$

gesamt verfügbare sp. Energie beim Eintritt in Rohr 1	gesamt verfügbare sp. Energie beim Austritt aus Rohr 3	sp. Energieverlust entlang des Rohrs 1 und im T-Stück	sp. Energieverlust entlang und im Austritt des Rohrs 3

Kontinuitätsgleichung

$$m\acute{}_1 = m\acute{}_2 + m\acute{}_3 \qquad d_1^2\cdot c_1 = d_2^2\cdot c_2 + d_3^2\cdot c_3 \qquad c_3 = \frac{d_1^2\cdot c_1 - d_2^2\cdot c_2}{d_3^2}$$

In Bernoulli-Gleichungen werden die Terme zusammengefasst

$$\frac{2\cdot(p_1 - p_0)}{\rho} + c_1^2\cdot\left[1 - \left(\lambda\cdot\frac{L_1}{d_1} + \zeta_{12}\right)\right] + 2\cdot g\cdot(z_1 - z_2) = c_2^2\cdot\left(1 + \lambda\cdot\frac{L_2}{d_2} + \zeta_{20}\right) \qquad (1\text{-}2)$$

$$\frac{2\cdot(p_1 - p_0)}{\rho} + c_1^2\cdot\left[1 - \left(\lambda\cdot\frac{L_1}{d_1} + \zeta_{13}\right)\right] + 2\cdot g\cdot(z_1 - z_3) = c_3^2\cdot\left(1 + \lambda\cdot\frac{L_3}{d_3} + \zeta_{30}\right) \qquad (1\text{-}3)$$

p_1 wird nun zwischen den Gleichungen (1-3) und (1-2) eliminiert

$$c_1^2 \cdot (\zeta_{12} - \zeta_{13}) + 2 \cdot g \cdot (z_2 - z_3) = c_3^2 \cdot \left(1 + \lambda \cdot \frac{L_3}{d_3} + \zeta_{30}\right) - c_2^2 \cdot \left(1 + \lambda \cdot \frac{L_2}{d_2} + \zeta_{20}\right)$$

c_3 wird aus der Kontinuitätsgleichung eingesetzt und nach c_2 zusammengefasst. Es resultiert eine 2. Ordnungsgleichung in c_2

$$b_1 \cdot c_2^2 + b_2 \cdot c_2 + b_3 = 0$$

mit den Koeffizienten

$$b_1 = \frac{d_2^4}{d_3^4} \cdot \left(1 + \lambda \cdot \frac{L_3}{d_3} + \zeta_{30}\right) - 1 - \lambda \cdot \frac{L_2}{d_2} - \zeta_{20}$$

$$b_2 = -2 \cdot d_1^2 \cdot c_1 \cdot \frac{d_2^2}{d_3^4} \cdot \left(1 + \lambda \cdot \frac{L_3}{d_3} + \zeta_{30}\right)$$

$$b_3 = d_1^4 \cdot \frac{c_1^2}{d_3^4} \cdot \left(1 + \lambda \cdot \frac{L_3}{d_3} + \zeta_{30}\right) - c_1^2 \cdot (\zeta_{12} - \zeta_{13}) - 2 \cdot g \cdot (z_2 - z_3)$$

II. Anwendung des Lösungsweges

1. Schritt

$m'_{3\_1} := 0.3$ wobei $m'_{3\_1} = \frac{m'_3}{m'_1} = \frac{d_3^2 \cdot c_3}{d_1^2 \cdot c_1}$

2. Schritt

$\frac{d_2}{d_1} = 0.8$ $\frac{d_3}{d_1} = 0.6$

$\zeta_{12} := 0 + \frac{m'_{3\_1} - 0.2}{0.4 - 0.2} \cdot (0.02 - 0)$ $\zeta_{12} = 0.01$

$\zeta_{13} := 1 + \frac{m'_{3\_1} - 0.2}{0.4 - 0.2} \cdot (1.31 - 1)$ $\zeta_{13} = 1.155$

3. Schritt

$b_1 := \frac{d_2^4}{d_3^4} \cdot \left(1 + \lambda \cdot \frac{L_3}{d_3} + \zeta_{30}\right) - 1 - \lambda \cdot \frac{L_2}{d_2} - \zeta_{20}$ $b_1 = 4.944$

$b_2 := -2 \cdot d_1^2 \cdot c_1 \cdot \frac{d_2^2}{d_3^4} \cdot \left(1 + \lambda \cdot \frac{L_3}{d_3} + \zeta_{30}\right)$ $b_2 = -234.568 \frac{m}{s}$

$$b_3 := d_1^4 \cdot \frac{c_1^2}{d_3^4} \cdot \left(1 + \lambda \cdot \frac{L_3}{d_3} + \zeta_{30}\right) - c_1^2 \cdot (\zeta_{12} - \zeta_{13}) - 2 \cdot g \cdot (z_2 - z_3) \qquad b_3 = 1932.352 \frac{m^2}{s^2}$$

Die Nullstellen sind:

$$c_2 := \frac{-b_2 + \sqrt{b_2^2 - 4 \cdot b_1 \cdot b_3}}{2 \cdot b_1} \qquad c_2 = 36.837 \frac{m}{s} \quad > \quad c_1 \cdot \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 = 15.6 \frac{m}{s}$$

die als unplausibel (viel zu groß) verworfen wird

$$c_2 := \frac{-b_2 - \sqrt{b_2^2 - 4 \cdot b_1 \cdot b_3}}{2 \cdot b_1} \qquad c_2 = 10.611 \frac{m}{s}$$

$$c_3 := \frac{d_1^2 \cdot c_1 - d_2^2 \cdot c_2}{d_3^2} \qquad c_3 = 8.914 \frac{m}{s}$$

Den Druck p_1 braucht man noch nicht zu berechnen.

4. Schritt

$$m'_{3\_1n} := \frac{d_3^2 \cdot c_3}{d_1^2 \cdot c_1} \qquad m'_{3\_1n} = 0.321$$

5. Schritt

$$\frac{\left|m'_{3\_1n} - m'_{3\_1}\right|}{m'_{3\_1n}} = 6.515\,\%$$

also > 1,5 % und eine weitere Iteration wird benötigt!

---

1. Schritt, 2. Iteration

$$m'_{3\_1} := m'_{3\_1n}$$

2. Schritt, 2. Iteration

$$\zeta_{12} := 0 + \frac{m'_{3\_1} - 0.2}{0.4 - 0.2} \cdot (0.02 - 0) \qquad \zeta_{12} = 0.012$$

$$\zeta_{13} := 1 + \frac{m'_{3\_1} - 0.2}{0.4 - 0.2} \cdot (1.31 - 1) \qquad \zeta_{13} = 1.187$$

3. Schritt, 2. Iteration

$$b_3 := d_1^4 \cdot \frac{c_1^2}{d_3^4} \cdot \left(1 + \lambda \cdot \frac{L_3}{d_3} + \zeta_{30}\right) - c_1^2 \cdot (\zeta_{12} - \zeta_{13}) - 2 \cdot g \cdot (z_2 - z_3) \qquad b_3 = 1935.383 \frac{m^2}{s^2}$$

Die Nullstellen sind:

$$c_2 := \frac{-b_2 + \sqrt{b_2^2 - 4 \cdot b_1 \cdot b_3}}{2 \cdot b_1} \qquad c_2 = 36.814 \frac{m}{s} \quad > \quad c_1 \cdot \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 = 15.6 \frac{m}{s}$$

die als unplausibel (viel zu groß) verworfen wird

$$c_2 := \frac{-b_2 - \sqrt{b_2^2 - 4 \cdot b_1 \cdot b_3}}{2 \cdot b_1} \qquad c_2 = 10.634 \frac{m}{s}$$

$$c_3 := \frac{d_1^2 \cdot c_1 - d_2^2 \cdot c_2}{d_3^2} \qquad c_3 = 8.872 \frac{m}{s}$$

4. Schritt, 2. Iteration

$$m'_{3\_1n} := \frac{d_3^2 \cdot c_3}{d_1^2 \cdot c_1} \qquad m'_{3\_1n} = 0.319$$

5. Schritt, 2. Iteration

$$\frac{\left| m'_{3\_1n} - m'_{3\_1} \right|}{m'_{3\_1n}} = 0.469\,\%$$

also < 1,5 % und keine weitere Iteration wird benötigt!

Der Eingangsdruck wird berechnet

$$p_1 := \left[p_0 + \rho \cdot \frac{c_2^2}{2} + \rho \cdot g \cdot z_2 + \rho \cdot \frac{c_1^2}{2} \cdot \left(\lambda \cdot \frac{L_1}{d_1} + \zeta_{12} \right) \ldots \atop + \rho \cdot \frac{c_2^2}{2} \cdot \left(\lambda \cdot \frac{L_2}{d_2} + \zeta_{20} \right) - \left(\rho \cdot \frac{c_1^2}{2} + \rho \cdot g \cdot z_1 \right) \right] \qquad p_1 = 2.105\,bar$$

3.5. Ähnlichkeitsbetrachtungen

Im Falle, dass Rückschlüsse über das Strömungsverhalten eines Fluids gemacht werden soll, wobei Messergebnisse nur für andere Fluide (üblich Wasser und Luft) bekannt sind, werden Ähnlichkeitsbetrachtungen eingesetzt.
Als Beispiel kann eine Luftströmung, die sehr schwer zu Visualisieren ist, durch eine Wasserströmung simuliert, wo das Visualisieren kein Problem darstellt. Um die Wasser- die Luftströmung zu simulieren, sollen die in diesen Fall wichtigen Kennzahlen identische Werte in beiden Strömungen haben.

Beispiel

Für die Untersuchung der Strömungsprozesse bei der Lufteinströmung in den Zylinder eines 4-Takt-Motors werden im Stationärbetrieb Visualisierungen mit Wasser (als Testfluid) bei $p_W := 1 \cdot bar$, $t_W := 30 \cdot °C$ statt Luft durchgeführt.

> Stationär bedeutet hier, dass der Kolben und die offenen Ventile in festen Positionen bleiben. Das durch die Ventile im Zylinder eindringende Wasser wird vom Zylinder durch seitlich im unteren Teil der Zylinderwand durchgeführte Bohrungen abgeführt. Die Strömung des Wassers kann somit als stationär betrachtet werden.

a) Man prüfe, ob die Luftströmung mit $c_L := 80 \cdot m \cdot s^{-1}$, $p_L := 1 \cdot bar$ und $t_L := 25 \cdot °C$ in diesen Fall als inkompressibel betrachtet werden darf, d.h. ob $\frac{\rho_0 - \rho}{\rho_0} < 5 \cdot \%$ ist, wobei hier ρ_0 die Luftdichte im Kessel- oder Stauzustand ist.

b) Welches Strömungsgeschwindigkeitsverhältnis zwischen Wasser und Luft soll aus Ähnlichkeitsgründen (d.h. die Strömungsart soll in beiden Fällen erhalten bleiben) genommen werden?

Gegebene Zahlenwerte:

$$R_L := 287.02 \cdot \frac{J}{kg \cdot K} \qquad T_0 := 273.15 \cdot K \qquad \kappa := 1.4$$

Lösung

a) $\rho_0 = \rho\cdot\left(1 + \frac{\kappa - 1}{2}\cdot Ma^2\right)^{\frac{1}{\kappa-1}}$ $\rho_L := \frac{p_L}{R_L\cdot(t_L + T_0)}$ $\rho_L = 1.169\,\frac{kg}{m^3}$

$a := \sqrt{\kappa\cdot\frac{p_L}{\rho_L}}$ $a = 346.129\,\frac{m}{s}$

$Ma := \frac{c_L}{a}$ $Ma = 0.231$

$$\frac{\rho_0 - \rho}{\rho_0} = \frac{\frac{\rho_0}{\rho} - 1}{\frac{\rho_0}{\rho}} = \frac{\left(1 + \frac{\kappa - 1}{2}\cdot Ma^2\right)^{\frac{1}{\kappa-1}} - 1}{\left(1 + \frac{\kappa - 1}{2}\cdot Ma^2\right)^{\frac{1}{\kappa-1}}} \qquad \frac{\rho_0 - \rho}{\rho_0} = 2.622\cdot\%$$

d.h. die Luftströmung darf in diesem Fall als inkompressibel betrachtet werden!

b) $Re_L = Re_W$ $\frac{c_L\cdot L}{\nu_L} = \frac{c_W\cdot L}{\nu_W}$ $\frac{c_L}{c_W} = \frac{\nu_L}{\nu_W}$

$\nu_W := 0.551\cdot 10^{-6}\,\frac{m^2}{s}$ $\nu_L := 15.58\cdot 10^{-6}\cdot\frac{m^2}{s}$ $\frac{\nu_L}{\nu_W} = 28.276$

d.h. $\frac{c_L}{c_W} = 28.276$